**Введение**

# **Модель межотраслевого баланса Леонтьева**

Рассмотрим *n* отраслей промышленности, каждая из которых производит свою продукцию. Обозначим - валовой выпуск продукции отрасли *i*, продукция каждой отрасли потребляется в данной отрасли и во всех других отраслях экономики (в противном случае соответствующее значение переменной равно нулю), часть продукции потребляется вне сферы материального производства и называется конечным продуктом. Обозначим - величина продукта, произведенного в отрасли *i,* потребляемого в отрасли *j, -* величина конечного продукта отрасли *i*. Тогда производство и потребление продукции каждой отрасли может быть записано в виде



или для всех отраслей экономики региона в виде системы уравнений

 (1.5.1)

Построенная система линейных уравнений носит название **системы балансовых уравнений**, т.к. определяет объемы произведенной и потребляемой продукции по отраслям.

Величина  называется **коэффициентом прямых затрат** и определяет долю продукции отрасли *i*, которая потребляется в отрасли *j.* Тогда  и систему межотраслевого баланса можно представить в виде системы линейных уравнений

 (1.5.2)

Обозначим матрицы



и рассмотрим матричное уравнение (1.5.3), соответствующее системе (1.5.2)

, (1.5.3)

в котором матрица (вектор) *Х* называется вектором валового выпуска по отраслям, матрица *А* называется матрицей прямых затрат или технологической матрицей, матрица (вектор) *Y* называется вектором конечного продукта. Матричное уравнение (1.5.3) носит название **модели межотраслевого баланса Леонтьева** и позволяет решать задачи трех видов:

1) по известным величинам валового выпуска продукции отраслей *Х* и технологической матрице *А* можно вычислить величину конечного продукта *Y:*

из моде ли



где *Е –* единичная матрица. Следовательно,

 (1.5.4)

2) по заданным величинам конечного продукта *Y* и технологической матрице *А* можно определить необходимый выпуск продукции *Х:*

из модели



Следовательно,

 (1.5.5)

3) по известным величинам валового выпуска некоторых отраслей , заданным значениям конечного продукта других отраслей  и матрице прямых затрат *А* можно определить конечный продукт первых отраслей и валовой выпуск вторых, используя модель Леонтьева в виде системы уравнений (1.5.2).

Матрица называется **матрицей полных затрат**, так как каждый ее элемент - величина валового выпуска отрасли , необходимого для обеспечения выпуска единицы конечного продукта отрасли .

Матрица  называется **продуктивной**, то есть существует решение в модели Леонтьева, если найдется такой вектор (матрица) , что .

***Критерий продуктивности.*** Для того, чтобы матрица прямых затрат была продуктивной необходимо и достаточно, чтобы выполнялось одно из условий:

* 1. существует обратная матрица , все элементы которой неотрицательны,
  2. матричный ряд сходится, причем его сумма равна ,
  3. наибольшее по модулю собственное значение  матрицы , то есть решение характеристического уравнения , было строго меньше единицы,
  4. все главные миноры матрицы положительны.

**Цели и задачи курсовой работы**

Практическое применение матричных моделей в экономическом анализе и управлении является основной целью данной работы.

Основными задачами курсовой работы являются:

* расширение теоретических знаний по математике и ее применению в экономических исследованиях,
* приобретение практических навыков использования моделей матричного исчисления для решения экономических задач и задач управления,
* проведение анализа исходной и получаемой статистической информации по экономике регионов,
* оценка выбора управленческих решений для моделирования экономической ситуации.

**Задание по курсовой работе**

1. Среди городов Московской области или регионов России студенту необходимо выбрать административный объект, экономику которого он будет (условно) моделировать. Название города или региона участвует в названии темы курсовой работы, например, «Применение модели межотраслевого баланса Леонтьева для управления экономикой Курской области».
2. Для выбранного региона определить три основных отрасли экономики, участвующие в модели №1 – А1, А2, А3 (например, А1 – самолетостроение, А2 – пищевая промышленность и т.д.) и пять основных отраслей, участвующих в модели №2.

**Задача № 1**

1. Заполнить выбранными характеристиками (название региона, А1, А2, А3,, , ) таблицу 1:

*Таблица 1.* Имеются исходные данные об исполнении баланса за 2005 год в городе N (в условных денежных единицах) (*Задача №1)*:

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Отрасль произв-ва | Потребление | | | Конечный продукт | Валовой выпуск |
| А1 | А2 | А3 |
| А1 | 300 |  | 200 |  | 1000 |
| А2 |  | 480 | 270 |  | 950 |
| А3 | 480 | 360 | 200 | 300 | 1340 |

1. Составить балансовые уравнения модели и определить потоки средств производства по отраслям. Оценить имеющийся вклад отраслей в суммарный конечный продукт региона.
2. Найти технологическую матрицу коэффициентов прямых затрат А.
3. Исследовать матрицу А на продуктивность и найти матрицу коэффициентов полных затрат В. Сделать вывод о существовании решения в матричной модели Леонтьева.
4. Найти величины конечного продукта отдельно по всем отраслям и в целом по региону, если в его структуре предполагаются следующие изменения:

*Вариант 1*: конечный продукт в отрасли А1 увеличится на 10, в отрасли А2 снизится на 15%, в отрасли А3 увеличится в 1,2 раза,

*Вариант 2*: конечный продукт в отрасли А1 снизится на %, в отрасли А2 увеличится на 10%, в отрасли А3 увеличится на (++),

*Вариант 3*: конечный продукт в отрасли А1 увеличится в 1,3 раза, в отрасли А2 увеличится на (10+4), в отрасли А3 снизится на %.

Проанализировать полученный объем денежных средств для потребления вне сферы материального производства в целом и по структуре (отдельно по отраслям).

1. Найти необходимый объем валового выпуска каждой отрасли для каждого из вариантов изменения конечного продукта и оценить преимущества выбора одного из **вариантов перед остальными.**

**Решение**

Название региона – Тульская область.

Основные отрасли, участвующие в модели № 1:

А1 - Машиностроение,

А2 –Энергетика,

А3 –Пищевая промышленность.

Р1-Екатерина-9,

Р2-Роман-5,

Р3-Кравец-6.

Таблица 1.

Имеются исходные данные об исполнении баланса за 2005 год в области:

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Отрасль производства. | Потребление. | | | Конечный продукт. | Валовой выпуск. |
| Машиностроение | Энергетика | Пищевая промышленность |
| Машиностроение. | 300 | 350 | 200 | 250 | 1100 |
| Энергетика. | 110 | 480 | 270 | 90 | 950 |
| Пищевая промышленность. | 480 | 360 | 200 | 300 | 1340 |

По условию:



   

По формуле  получим систему балансовых уравнений области



Очевидно, что суммарный конечный продукт равен 250+90+300=640(условных денежных единиц), а наибольший вклад машиностроительной отрасли от общего объема конечный продукт составляет:



Энергетической отрасли от общего объема конечный продукт составляет:



Пищевой отрасли от общего объема конечный продукт составляет:



По формуле получим:

  

Таким образом, матрица прямых затрат имеет вид:

А=

Для исследования матрицы А на продуктивность, воспользуемся критерием продуктивности. Среди всех указанных условий, выберем условие существования обратной матрицы 

Для этого, прежде всего, найдем матрицу



и её определитель



Так как матрица D=(E-A) невырожденная, то у неё существует обратная, Следовательно, выполнен критерий продуктивности (его первое условие), матрица А продуктивна, а модель Леонтьева имеет решение.

Найдем алгебраические дополнения к элементам матрицы D:



 матрица полных затрат.

**Вариант 1**: По условию, в отчетном периоде величины конечного продукта составили:

  

если конечный продукт в машиностроении увеличится на 60у.е.



в энергетической отрасли снизится на 15%



в пищевой отрасли увеличится в 1,2 раза



Тогда вектор конечного продукта будет иметь вид

=

а необходимый для этого валового выпуска по отраслям



Следовательно, валовой выпуск машиностроения должен составить 1216 у.е.; энергетики 1002 у.е.; пищевой промышленности 1395 условных денежных единиц.

**Вариант 2**: По условию, в отчетном периоде величины конечного продукта составили:

  

если конечный продукт в машиностроении снизился на 6%



в энергетической отрасли увеличился на 10%



в пищевой отрасли увеличится на 20у.е.



Тогда вектор конечного продукта будет иметь вид



а необходимый для этого валового выпуска по отраслям

 Следовательно, валовой выпуск машиностроения должен составить 1056 у.е.; энергетики 951 у.е.; пищевой промышленности 1349 условных денежных единиц.

**Вариант 3:** По условию,в отчетном периоде величины конечного продукта составили:

  

если конечный продукт в отрасли машиностроения увеличился в 1,3 раза



в энергетической отрасли увеличится на 110у.е.



в пищевой отрасли снизится на 6%



Тогда вектор конечного продукта будет иметь вид



а необходимый для этого валового выпуска по отраслям



На мой взгляд вариант 3 самый выгодный так как затраты не очень велики по сравнению с 1 и 2 вариантами, а энергетика даже в плюсе, энергетика является одним из основных отраслей ведь не одно производство не обходится без электроэнергии.

**Литература**

* + 1. Высшая математика для экономистов: Учебн. пособие для вузов/Н.Ш.Кремер, Б.А.Путко, И.М.Тришин, М.Н.Фридман; Под ред. проф. Н.Ш.Кремера. - М.: Банки и биржи, ЮНИТИ, 2003.- 471 с.
    2. Общий курс высшей математики для экономистов: Учебник / Под ред. В.И.Ермакова. – М.: ИНФРА-М, 2002.- 656с. – (Серия “Высшее образование”).
    3. Малыхин В.И. Математика в экономике: Учебное пособие. – М.: ИНФРА-М, 2002. – 352 с. – (Серия “Высшее образование”).
    4. Замков О.О., Толстопятенко А.В., Черемных Ю.Н. Математические методы в экономике: Учебник. – М. МГУ им. М.В.Ломоносова, Издательство “ДИС”, 2004. – 368 с.
    5. Колесников А.Н. Краткий курс математики для экономистов: Учебное пособие. – М.: ИНФРА-М, 1997. – 208 с. – (Серия “Высшее образование”).
    6. Колемаев В.А. Математическая экономика: Учебник для вузов. – М.: ЮНИТИ, 1998.- 240 с.
    7. Красс М.С. Математика для экономических специальностей: Учебник. – 3-е издание, переработанное и дополненное. – М.: Дело, 2002. – 704с.
    8. Красс М.С., Чупрынов Б.П. Основы математики и ее приложения в экономическом образовании: Учебник. – 3-е издание, испр. – М.: Дело, 2002. – 688 с.
    9. Кундышева Е.С. Математическое моделирование в экономике: Учебное пособие / Под науч. Ред. Проф. Б.А.Суслакова. – М.: Издательско-торговая корпорация “Дашков и К”, 2004.- 352 с.