***Пошукова робота***

***на тему:***

Системи координат (декартова, полярна, циліндрична, сферична). Довжина і координати вектора. Векторний простір. Лінійна залежність і незалежність системи векторів.

План

* Базис.
* Лінійна залежність і незалежність векторів.
* Декартова система координат.
* Довжина і координати вектора.
* Поділ відрізка в заданому відношенні.
* Полярна система координат.
* Циліндрична система координат.
* Сферична система координат.
* Заміна системи координат.

**1. Базис**

  Довільна впорядкована (взята в певному порядку) трійка некомпланарних векторів називається *базисом простору.*

            *Базисом на площині* називаються два неколінеарних вектори, взяті в певному порядку.

            *Базисом на прямій* називається довільний ненульовий вектор на цій прямій.

            Ніякі два вектори базису в просторі  неколінеарні, оскільки в противному випадку всі три були б компланарні. Так само вектори базису на площині ненульові (якщо хоча б один із них був нульовий, то вони були б колінеарні).

            Якщо деякий вектор представити як лінійну комбінацію інших векторів, то говорять, що він *розкладений* за цими векторами.

            Означення. Якщо базис в просторі і  то числа  називаються *координатами* (*компонентами*) вектора  в даному базисі. Аналогічно визначаються координати вектора в базисі на площині (двома числами) і на прямій (одним числом). Координати вектора будемо позначати так:

            Із шкільного курсу математики відомі такі твердження:

            Кожний вектор, що паралельний деякій прямій, може бути розкладений за базисом на цій прямій.

            Кожний вектор, що паралельний деякій площині, може бути розкладений за базисом на цій площині.

            Кожний вектор може бути розкладений за базисом в просторі.

            Координати вектора в кожному випадку визначаються однозначно.

            Очевидно також, що  рівні вектори мають однакові координати.

            *При множенні вектора на число його координати множаться на це число.*

            Дійсно, якщо то

            *При додаванні векторів додаються їх координати.*

            Якщо   то

**2. Лінійна залежність векторів**

Лінійна комбінація декількох векторів називається *тривіальною*, якщо всі її коефіцієнти дорівнюють нулю. Лінійна комбінація *не тривіальна*, якщо хоча б один із її коефіцієнтів відмінний від нуля.

            Означення. Вектори  називаються *лінійно незалежними*, якщо тільки тривіальна комбінація векторів дорівнює нулю. Якщо вектори лінійно незалежні, то із рівності  випливає

            В противному випадку вектори будуть *лінійно залежними*. Це значить, що існує нетривіальна лінійна комбінація цих векторів, що дорівнює нулю. Іншими словами, існують такі коефіцієнти , що   і

            Якщо серед векторів  є нульовий, то ці вектори лінійно залежні. Взявши при нульовому вектору коефіцієнт 1, а при всіх інших – нулі, одержимо нетривіальну лінійну комбінацію, що дорівнює нулю.

            Теорема. Система векторів лінійно залежна тоді і тільки тоді, коли один із них розкладається в лінійну комбінацію інших.

Д о в е д е н н я. Нехай  лінійно залежні, тобто існують такі коефіцієнти , що  і хоча б один із коефіцієнтів, наприклад,

 В цьому випадкує лінійна комбінація векторів .

Дійсно, ми можемо записати

І, навпаки, нехай один із векторів, наприклад , розкладений в лінійну комбінацію інших векторів:

Звідси безпосередньо видно, що лінійна комбінація векторів з коефіцієнтами –1,  дорівнює нульовому вектору. Оскільки вона нетривіальна, то вектори  лінійно залежні. Теорема доведена.

            *Довільних два колінеарних вектори лінійно залежні, і навпаки, два лінійно залежних вектори колінеарні.*

*Довільних три компланарних вектори лінійно залежні, і навпаки, три лінійно залежні вектори компланарні.*

*Кожних чотири вектори лінійно залежні.*

            Ці твердження пропонуємо читачеві довести самостійно.

**3. Декартова система координат**

Зафіксуємо в просторі точку  і розглянемо довільну точку

 *Радіус-вектором* точки по відношенню до точки  називається вектор Якщо в просторі, крім точки вибраний деякий базис, то точці можна співставити  впорядковану трійку чисел – координати  його радіус-вектора.

            Означення. *Декартовою системою координат* в просторі називається сукупність точки і базису.

            Точка носить назву *початку координат*;прямі, що проходять через початок координат в напрямку базисних векторів, називаються *осями координат*. Перша – віссю *абсцис* , друга – віссю *ординат,* третя – віссю *аплікат*. Площини, що проходять через осі координат, називаються *координатними площинами.*

            Означення. Координати радіус-вектора точки по відношенню до початку координат називаються *координатами* точки  в розглядуваній системі координат .

Перша координата називається *абсцисою*, друга – *ординатою*, третя – *аплікатою*.

Детальніше про метод координат можна ознайомитися в п.3.1.

Означення. Базис називається *ортонормованим,* якщо його вектори одиничні (довжина кожного дорівнює одиниці) і попарно перпендикулярні. Декартова система координат, базис в якої ортонормований, називається *прямокутною декартовою системою координат* (ПДСК). В цьому випадку, як правило, вектори базису позначають

            Розглянемо тепер проекцію вектора на координатні осі системи координат(рис.2.5).

            На рис.2.5 вектор  замикає ламану  , тобто

            .

Це означає, що будь-який вектор можна розкласти на суму трьох доданків, що лежать на осях координат. Ці три доданки є проекціями вектора  на координатні осі.

Вектори  називаються *компонентами*

(*координатами*) даного вектора відносно системи координат

.

            Введемо в розгляд  одиничні вектори осей координат . Нехай проекції вектора на координатні осі  дорівнюють відповідно . Тоді .

Тому

                                                                           (2.1)



|  |
| --- |
|  |
|  |  |

                                    Рис.2.5

Якщо в системі координат задано вектор своїм початком  і кінцем , то (рис.2. 6)

                                   (2.2)

                 Рис.2.6

Цей факт доводиться досить легко.

НехайТоді з знаходимо

, що випливає безпосередньо з

правила віднімання векторів.

**4. Поділ відрізка в заданому відношенні**

            Потрібно знайти координати точки, що ділить відрізок між точками  і  у відношенні (рис. 2.7).

            Нехай  і .

Тоді .



|  |
| --- |
|  |
|  |  |

Звідси

                                           Рис.2.7

Нехай координати точки дорівнюють відповідно . Тоді матимемо і

.

            Оскільки два вектори рівні тоді і тільки тоді, коли рівні їх відповідні координати, то

                                (2.3)

Отже, координати точки знайдені.

            Якщо точка середина відрізка то, очевидно,  і з формули (2.3) одержимо координати середини відрізка

                                                 (2.4)

**5. Полярні координати**

                Положення точки на площині можна визначити не тільки за допомогою прямокутної системи координат. Таку проблему можна  розв’язати і так: виберемо на  точку  - полюс і проведемо півпряму

 - полярну вісь (рис.2.8).

                Положення точки  на площині можна визначити віддаллю точки від полюса  - полярним радіусом точки  і кутом  між  і  (полярним кутом ). Числа  і  називаються полярними координатами точки в полярній системі координат. Якщо , то точці буде відповідати лише одна пара чисел  і , і навпаки. Для полюса (тобто точки ) , а  - довільне число. Кут , як правило, відраховується від полярної осі проти годинникової стрілки (на рис. 2.8) це показано дуговою стрілкою).

            Можна відмовитись від однозначності полярного кута  при визначенні положення точки , враховуючи і кількість обертів, які здійснює полярний радіус, щоб його кінець потрапив в точку . Якщо кількість обертів позначити через , то полярний кут точки  дорівнюватиме .

            Відмовитись також можна і від обмеження на знак , щоб відрізнити точки і , що лежать на промені , вважаючи, що для точки полярний радіус , задля точки .

Далі будемо вважати, що   , а . На рис.     2.8 зображені точки .

          На рис.2.8 полярна система координат  суміщена з прямокутною системою координат , причому полюс полярної



Рис.2.8 системи збігається з початком координат

                                                    прямокутної.

Точці  відповідають координати       полярної системи і координати  прямокутної системи.

            З прямокутного трикутника знаходимо

                                      .                          (2.5)

            Ці формули дають можливість перейти від полярних до прямокутних координат. З того самого трикутника знаходимо . Звідси



            Ці формули  дозволяють здійснити перехід від прямокутної до полярної системи координат.

**6. Циліндрична система координат**

            Циліндричні координати є поєднанням полярних координат у площині  і звичайної прямокутної (декартової) аплікати . Формули, що зв’язують ці дві системи координат, мають вигляд

                                                                                        (2.6)

де .

            Тут кожному конкретному  відповідає циліндрична поверхня. При зміні  від 0 до  такі циліндричні поверхні заповнюють весь простір . Твірні всіх цих циліндрів паралельні осі , а їх проекції на площину є кола з центром у початку координат (рис.2.9). Кожному конкретному відповідає півплощина, що проходить через вісь . При зміні  від 0 до ця півплощина описує весь простір .

            Кожному сталому  відповідає площина, паралельна площині . При зміні ці площини теж заповнюють весь простір .

            Циліндрична система часто використовується у багатьох задачах математики, зокрема – в інтегральному численні.

**7. Сферичні координати**

            Сферичними координатами є , а  декартовими - і

. На рис.2.10 поєднано ці дві координатні системи. Тут  набуває довільних невід’ємних значень, тобто .

Рис.2.9                             Рис.2.10

            Кожному конкретному  відповідає сфера радіуса   з центром у початку координат. При зміні  всі ці сфери заповнюють весь простір. Параметру  відповідає півплощина, що проходить через вісь , а  - кругові конуси, віссю яких є вісь . Тут мається на увазі двопорожнинний конус (рис.2.10). Тепер зрозуміло, що величина  змінюється від 0 до , бо при такій зміні множина всіх конусів заповнює весь простір . Очевидно також, що .

            Сферична система координат теж широко використовується в ряді галузей математики, зокрема при обчисленні потрійних інтегралів.

            Зв’язок між сферичною і декартовою системою координат описується формулами

                   .          (2.7)

            Наприклад, перше з цих співвідношень доводиться так:

 (із прямокутного трикутника ). Далі , що і треба було довести.

            Інші співвідношення доводяться аналогічно.

**9. Зміна системи координат**

            Розглянемо дві декартові системи координат: стару  і нову  Нехай довільна точка, координати якої в цих системах координат позначимо відповідно  і Поставимо перед собою задачу виразити  через

 вважаючи відомими положення нової системи координат

відносно старої, тобто вважаючи відомими старі координати нового початку координат  і координати нових базисних векторів в старому базисі, що складають матрицю переходу від базису

 до базису

.

В матриці переходу стовпці – це координати нових базисних векторів

 за старим базисом .

            Радіус-вектори точки відносно точок і  зв’язані рівністю



оскільки координати  в базисі . Розкладемо кожен член даної рівності за базисом , маючи на увазі, що компоненти  і  дорівнюють координатам точок  і  які ми позначили відповідно через  і Запишемо рівність  в координатній формі



Рівності  представляють закон перетворення координат точки при переході від однієї декартової системи координат до іншої.

            Формули переходу від однієї декартової системи координат на площині до іншої можуть бути одержані із

            Розглянемо частинний випадок, коли обидві системи координат – декартові прямокутні ( базиси -   і  Позначимо через  кут між векторами  і    який відраховується в напрямку найкоротшого повороту від  до  Тоді (рис.2.11)

Рис.2.11а                                             Рис.2.11б

В розкладі  ставиться знак плюс (рис.2.11а), якщо найкоротший поворот від  до  направлений так само, як  найкоротший поворот від  до  тобто якщо новий базис повернутий відносно старого на кут  Знак мінус в розкладі  ставиться в протилежному випадку, коли новий базис не може бути одержаний поворотом старого (рис.2.1б).  Оскільки

одержимо

                                                              (2.8)

причому при повороті системи координат береться верхній знак.