## Введение

В развитии геометрии можно указать четыре периода.

Первый период (до 7 в. до н. э) - зарождение геометрии в Египте и Вавилоне. Геометрия этого периода - наука эмпирическая.

Второй период (7-3 в. до н. э) - греческий. В Греции геометрия тесно связана с философией. Геометрия этого периода - наука теоретическая.

В 3 в. до н.э. появились „Начала" Евклида - первая попытка построения геометрии на принципах Аристотеля (384-322 до н. э).

Третий период (17-18 в) развития геометрии связан с переходом её на качественно новую ступень по сравнению с геометрией древних. Этот период времени характерен открытием новых методов исследования и появлением различных дисциплин.

Аналитическая геометрия, дифференциальная геометрия, проективная геометрия, начертательная геометрия - это всё приложения того или иного аппарата к объектам евклидовой геометрии.

Четвёртый период (с 19 в) в развитии геометрии связан с именами русского математика Н.И. Лобачевского (1793-1856), немецкого математика К. Гаусса (1777-1855) и венгерского математика Я. Бойаи (1802-1860).

Именно эти учёные независимо друг от друга пришли к открытию неевклидовой геометрии, которая называется теперь геометрией Лобачевского.

Этот период времени ознаменован более пристальным вниманием математиков к проблеме обоснований геометрии.

Почти в одно и то же время появляются различные аксиоматические системы для обоснования евклидовой геометрии. Одна из них принадлежит немецкому математику Д. Гильберту (1540-1603).

Система аксиом Гильберта состоит из пяти групп (аксиомы связи, аксиомы порядка, аксиомы конгруэнтности, аксиомы непрерывности, аксиома параллельности).

Если в этой системе аксиом заменить аксиому параллельности на аксиому Лобачевского, то мы получим аксиоматику геометрии Лобачевского, которая и рассматривается в дипломной работе.

В связи с аксиоматическим построением геометрии возникает, в частности, вопрос о непротиворечивости выбранной аксиоматики, что связано с построением некоторой модели.

В дипломной работе предлагается одна из моделей геометрии Лобачевского, а именно, модель французского учёного А. Пуанкаре (1854-1912), и с помощью её решается вопрос о непротиворечивости геометрии Лобачевского.

Заметим, что при построении модели Лобачевского большую роль играет инверсия (симметрия относительно окружности). Поэтому первая глава работы посвящена инверсии.

## Глава 1. Инверсия и её свойства

## 1. Определение инверсии

Присоединим к евклидовой плоскости „бесконечно удалённую" точку . Получим расширенную плоскость, обозначим её через П.



Пусть в плоскости П дана окружность (O,r) с центром O и радиусом r.

*Определение.* Инверсией относительно окружности (O,r) называют такое отображение П на себя, при котором всякой точке АП, (А≠О, А≠) ставится в соответствие точка А'П так, что выполняются условия:



1) А' [OA),



2) |OA|·|OA'|=.



Точке О ставим в соответствие точку и, обратно, точке -точку О.



Символом обозначим инверсию относительно окружности (O,r).



Отметим простейшие свойства инверсии, которые вытекают из определения.

. Пусть АП и (A) =A'. Тогда (A') =A.



Точки А и А' называются инверсными.

. Инверсия является 1-1 отображением расширенной плоскости П на себя.



. Пусть АП и (A) =A'.



Если |OA|>r, то |OA'|<r.

Если |OA|<r, то |OA'|>r.

Если |OA|=r, то |OA'|=r.

Таким образом, точки окружности (O,r) и только они, являются при неподвижными.



Легко выполнить построение точки, инверсной данной. Рассмотрим три возможных случая:

1) |OA|=r, то A'=A.

2) |OA|>r. Проведём [OA). Через точку А проводим касательную к (O, r). Пусть Т - точка касания. Проведём из Т перпендикуляр на [OA). Основание этого перпендикуляра и есть искомая точка А'. Действительно, из прямоугольного ОТА имеем |OA|·|OA'|==.



3) |OA|<r. В силу свойства получаем



следующее построение: восставляем в точке А перпендикуляр к [OA), в точке пересечения этого перпендикуляра с (O, r) проводим касательную к (O, r) и в пересечении касательной с [OA) получаем искомую точку А'.



Продолжим рассмотрение свойств инверсии.

. Пусть AПи ВПи (A) =A', (B) =B'.



Тогда



*Доказательство.*



ОАВ~ОВ'А',



тогда

.



Учитывая, что

,



получаем



Введём понятие сложного отношения четырёх точек.

*Определение.*

.



. Инверсия сохраняет сложное отношение четырёх точек.



*Доказательство.* Даны точки A, B, C, D. (A) =A',



(B) =B', (C) =C', (D) =D'. Используя предыдущее свойство, имеем:



.



Отсюда получаем



Тогда



т.е. (ABCD) = (A'B'C'D').

*Замечание.*

Пусть A'= (A). Имеем



Откуда, перемножив, получаем



и .



Зафиксируем точку В, а r пусть неограниченно возрастает, тогда |AB|=|A'B|, т.е. инверсия относительно „окружности бесконечно большого радиуса" есть симметрия относительно прямой.

## 2. Аналитическое задание инверсии

Пусть A'= (A), где АO, А. Введём на плоскости декартову прямоугольную систему координат так, чтобы её начало совпало с точкой О.



Пусть x, y - координаты точки А, x', y'-координаты точки А'. Выразим х и у через х' и у'. Имеем А' [OA) и

,

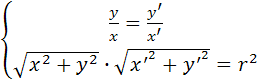
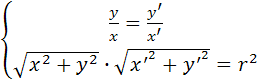


.



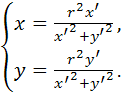
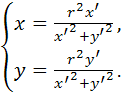
Очевидным образом получаем

,



откуда находим

(1)



## 3. Преобразование окружности и прямой при инверсии

Пусть (O, r) П. Рассмотрим окружность SП. Найдём (S).



Введём на плоскости систему координат хОу. Пусть в этой системе координат окружность S имеет уравнение

A () +Bx+Cy+D=0 (2)



Подвергнем S инверсии . Подставляя в (2) вместо х и у их выражения из (1), получим



A+Bx'+Cy'+D () =0 (3)



Если D=0, т.е. если OS, то (S) - прямая, не проходящая через О.



Если D0, т.е. если OS, то (S) - окружность, не проходящая через точку О.



Итак, доказана.

*Теорема 1.* Если окружность проходит через центр инверсии, то она преобразуется при инверсии в прямую, не проходящую через центр инверсии; если окружность не проходит через центр инверсии, то она преобразуется в окружность, не проходящую через центр инверсии.

Аналогично доказывается следующая.

*Теорема 2*. Если прямая проходит через центр инверсии, то она преобразуется при инверсии в себя; если прямая не проходит через центр инверсии, то она преобразуется в окружность, проходящую через центр инверсии.

## 4. Сохранение углов при инверсии

*Определение.* Прямые *a* и *b* назовём антипараллельными относительно О, если.



*Лемма.* Если (A) =A' и (B) =B', то прямые АВ и А'В' антипараллельны.



Доказательство получим, рассмотрев ОАВ и ОА'В'.



*Теорема 3.* Инверсия сохраняет величину углов.

*Доказательство.* Пусть *f* и *g*-кривые, выходящие из точки А, *f*'= (*f*), *g*'= (*g*) и A'= (A).



Проводим из точки О луч, пересекающий *f* и *g* в точках В и С соответственно. Пусть B'= (B), C'= (C). По лемме прямые АВ и А'В', АС и А'С' антипараллельны. Значит, OA'B'=OBA



и OA'C'=OCA, тогда



C'A'B'=OA'B' - OA'C'=OBA-OCA=CAB.



Переходя в равенстве C'A'B'=CAB к пределу при АОС0 (луч ОС приближаем к лучу ОА), получим утверждение теоремы.



*Замечание.* Доказанное свойство позволяет легко строить образы прямых и окружностей при инверсии.

Пусть, например, дана прямая L и



Проведём луч *l* с началом О, перпендикулярно L.

Пусть A'= (A).



В силу теорем 2 и 3 заключаем, что L'= (L) - окружность с диаметром ОА'.



## 5. Инвариантные прямые и окружности

Из теоремы 2 следует, что прямые, проходящие через центр инверсии, и только они, отображаются при на себя, т.е. эти прямые инвариантны при .



Мы уже отмечали, что ( (O,r)) = (O,r), т.е. окружность (O,r) инвариантна при .



Существуют ли другие окружности, инвариантные при ? Ответ на этот вопрос даёт следующая.



*Теорема 4.* Пусть S-окружность, отличная от (O,r). (S) =S тогда и только тогда, когда S ортогональна (O,r),



*Доказательство.* Допустим, что (S) =S. Ясно, что S пересекает (O,r) в двух точках, скажем, A и B.



Имеем .



Согласно теореме 3

( (O,r) ^) = ( (O,r) ^),



а это означает ортогональность S и (O,r).

Докажем обратное. Пусть теперь (O,r) ортогональна S, A и B - точки пересечения S и (O,r).

Проведём в точке А касательные к S и (O,r), которые пройдут через центры окружностей (O,r) и S соответственно.



Отсюда ясно, что S-единственная окружность, ортогональная (O,r) и проходящая через точки A и B.

Так как (если допустить, что , то (S) - прямая, ортогональная (O,r) и не проходящая через точку O, что невозможно), то (S) - окружность, ортогональная (O,r) и проходящая через точки A и B. Значит, (S) =S.



*Теорема 5.* Окружность, проходящая через две инверсные точки, преобразуются при инверсии в себя.

*Доказательство.* Пусть A'= (A), S - окружность такая, что и . Пусть B - произвольная точка S и B'=, тогда



,



т.е. (B) =B', а это значит, что



(S) =S'.



*Следствие.* Окружность, проходящая через две инверсные точки, ортогональна к окружности инверсии.

Рассмотрим далее две задачи, которые нам потребуются в дальнейшем изложении.

*Задача 1.* Дана прямая и окружность. Найти инверсию, переводящую прямую в окружность.

Дана прямая *l* и окружность S с центром в точке С. Проведём (СР)

*l,*.



Примем О за центр инверсии, тогда Р и Р' - инверсные точки, значит

r=.



Итак,

-



искомая инверсия, переводящая прямую в окружность.

*Задача 2.* Даны две окружности () и (). Найти инверсию, переводящую одну окружность в другую.



Имеет место

*Теорема.* Любые две неравные окружности гомотетичны и имеют внутренний и внешний центр гомотетии.



Т.к. инверсные точки, по определению, принадлежат одному лучу с вершиной в центре инверсии, то за центр инверсии выберем внешний центр гомотетии.

Пусть это точка О, тогда радиус инверсии

r= (см. рисунок).



## 6. Модель Пуанкаре геометрии Лобачевского на плоскости

Рассмотрим евклидову плоскость и евклидову прямую *f* в ней. Прямая f разбивает евклидову плоскость на две полуплоскости. Выберем одну из этих полуплоскостей без её границы и назовём плоскостью Лобачевского.



Точкой Лобачевского (Л-точкой) назовём евклидову точку, принадлежащую выбранной полуплоскости без границы f.

Прямыми Лобачевского (Л - прямыми) назовём евклидовы полуокружности (в том числе и „полуокружности бесконечно большого радиуса”, ортогональные f и расположены в выбранной полуплоскости без границы.

Определим далее отношения „лежать между", „лежать на", „быть конгруэнтными" и покажем, что при этом выполняются все аксиомы геометрии Лобачевского.

Будем говорить, что Л - точка лежит на Л - прямой, если евклидова точка лежит на евклидовой полуокружности или евклидовом луче.

Проверим выполнимость аксиом принадлежности.

Пусть даны Л - точки А и В. Покажем, что существует Л - прямая, проходящая через эти Л - точки.



Проведём евклидову отрезку АВ срединный перпендикуляр в евклидовом смысле.

Если то евклидова полуокружность (О, |OA|) - есть



Л - прямая, если то Л - прямой будет евклидов луч.



Из указанных построений следует выполнимость и аксиомы

Каковы бы ни были точки А и В существует не более одной прямой, проходящей через эти две точки.



На каждой прямой лежат по крайне мере две точки. Существуют три точки, не лежащие на одной прямой.



Аксиома выполняется на модели, т.к это утверждение справедливо для евклидовой полуокружности и евклидова луча.



*Замечание.* На следующем рисунке представлена на модели

*Теорема.* Две прямые имеют не более одной общей точки.



Отношение „лежать между" будем понимать в обычном евклидовом смысле для точек полуокружности и луча.



Аксиомы выполняются на модели, т.к они справедливы для евклидовых точек, евклидовых полуокружностей и лучей.



Проверим выполнимость аксиомы .



Пусть даны Л - точки А, В, С, такие, что; и Л - прямая *а* такая, что



Пусть, далее , и имеет место ADB. Покажем, что на Л - прямой *a* существует Л - точка F такая, что имеет место либо BFC, либо AFC.



Доказательство следует из теоремы: две евклидовы окружности пересекаются тогда и только тогда, когда одна из них проходит через внутреннюю точку другой окружности.



В самом деле, т.к имеет место ADB, то одна из точек А или В по отношению к окружности *а* внутренняя, пусть это точка В. Тогда, если точка С лежит вне окружности *а*, то имеет место BFC; если точка С лежит внутри окружности *а,* то имеет место AFC.

*Замечание.* На следующих рисунках представлена интерпретация отрезка, луча, угла, треугольника в плоскости Лобачевского.



[AB]



[A*a*)



(*a,b*)



ΔАВС

Прежде чем определить отношение „быть конгруэнтными", введём понятие неевклидова движения.

Пусть Л - прямая *а* задана в виде евклидовой полуокружности.



Симметрией Л - плоскости относительно Л - прямой *а* назовём инверсию евклидовой полуплоскости относительно евклидовой полуокружности.



Если Л - прямая *а* задана в виде евклидова луча, то будем иметь симметрию относительно евклидовой прямой.



Неевклидовым движением назовём конечную цепочку симметрий Л - плоскости относительно Л - прямых.

Будем говорить, что [AB] [CD], если существует неевклидово движение : (A) =C,



(B) =D.



если существует неевклидово

движение :



(а) =с,



(b) =d.



Проверим выполнимость аксиом конгруэнтности.

Пусть дан Л - отрезок *uv* и Л - луч *Аа*. Докажем, что



1) на [*Aa*) существует Л - точка *В* такая, что [AB] [*uv*] ;



2) [AB] [BA].



рис. 1



Рис.2

Рассмотрим

;



тогда



Рассмотрим

,



тогда

.



Рассмотрим

где ,



(OF) - касательная из точки О к *а*, тогда

(),



Из , то цепочку симметрий оборвём и (см. рис.1).



Если , то рассмотрим ещё одну симметрию



-



касательная к *а* в точке А (см. рис.2).

Итак, имеем неевклидово движение , преобразующее *u* в А, *v* в В, т.е.



[AB] [*uv*].



Докажем, что [AB] [BA].



Рассмотрим

, где



- касательная из точки к *а,* тогда *а=I (a), B=I (A), A=I (B).*



Итак, имеем неевклидово движение , преобразующее



*А* в *В, В* в *А,* т.е. [*AB*] [*BA*].



Прежде чем продолжить проверку аксиом конгруэнтности, рассмотрим

*Замечание 1.* Критерий конгруэнтности отрезков на модели Пуанкаре.



Рассмотрим упорядоченные четвёрки точек *A, B, M, N* и *C, D, P, Q.*



*Доказательство.1*) Пусть . Докажем, что (*ABMN*) = (*CDPQ*).



Т.к. , то существует неевклидово движение , такое, что . Остаётся показать, что . Учитывая, что - конечная цепочка инверсий с центрами на f, и каждая инверсия сохраняет величину угла, имеем .



Т. к.

, то ,.



Итак, (*ABMN) = (CDPQ).*

Пусть (*ABMN) = (CDPQ*). Докажем, что .



Рассмотрим

;



тогда

,



Рассмотрим

;



тогда

, .



Рассмотрим , где , (OF) - касательная из точки О к *с*. Тогда , , .



Покажем, что .



Имеем , , тогда (*ABMN) = (CPQ).*



Учитывая условие теоремы, получаем (*CDPQ*) = (C), откуда , т.е. D и принадлежат окружности Аполлония (), которая пересекает *с* в единственной точке, поэтому .



Итак, существует неевклидово движение , такое, что т.е. .



*Замечание 2.* Критерий конгруэнтности углов на модели Пуанкаре.

Пусть - евклидова величина неевклидова угла (*а,b*), - евклидова величина неевклидова угла (*c, d*).



.



*Доказательство.1*) Пусть , тогда существует неевклидово движение :



Т. к. - это конечная цепочка инверсий, а инверсия сохраняет величину углов, то .



2)



Пусть . Рассмотрим неевклидово движение , такое, что .



Пусть . Если окажется по отношению к неевклидову лучу *с* в той же полуплоскости, что и *d*, то , т.к инверсия сохраняет величину углов.



Если же окажется в другой полуплоскости относительно луча *с*, то рассмотрим инверсию .



Т.к. *с* - является биссектрисой угла (), то .



Имеем неевклидово движение , такое, что , , откуда .



Вернёмся к проверке аксиом конгруэнтности. . Пусть [AB] [*UV*], [CD] [*UV*]. Покажем, что .



Т.к. [AB] [*UV*], то (*ABMN*) = (*UVLK*) (1)



Т. к. [CD] [*UV*], то (*CDPQ*) = (*UVLK*) (2)



Из (1) и (2) имеем (*ABMN*) = (*CDPQ*), откуда



(см. критерий конгруэнтности отрезков на модели Пуанкаре).

. Пусть имеет место *ABC* и , и ,



. Покажем, что .



Т.к. , то (1)



Т.к. , то (2)



Перемножив (1) и (2), получим , откуда (см. критерий конгруэнтности отрезков на модели Пуанкаре).



. Пусть дан и луч [*Aa*) с указанной полуплоскостью. Покажем, что существует единственный луч [*Ab*) в указанной полуплоскости, такой, что ; и каждый угол конгруэнтен самому себе.



Пусть - евклидова величина неевклидова угла (*u,v*).



В точке *А* к евклидовой полуокружности *а* проведём

касательную в евклидовом смысле и построим в указанной полуплоскости угол, конгруэнтный . Получим евклидову прямую .



Построим в точке *А* к прямой перпендикуляр до пересечения с *f* в точке *О*. С центром в точке *О*, радиусом *ОА* проведём полуокружность.



Таким образом, получим неевклидов луч *Ab*.

Т.к. , то (см. критерий конгруэнтности углов на модели Пуанкаре).



Единственность луча *b* следует из однозначности приведённых построений.

Покажем далее, что . Это следует из равенства евклидовых величин этих углов.



. Пусть и , , , . Покажем, что , .



Т.к. , то существует неевклидово движение , преобразующее стороны в стороны .



1) Пусть , .Т. к.



,, то , , т.е. и , , откуда , .



2) Пусть , .



Рассмотрим инверсию относительно биссектрисы . Тогда приходим к ситуации 1).



*Замечание.* На следующих рисунках изображены конгруэнтные между собой треугольники *ABC* и .



рис. 1



рис. 2

Рассмотрим далее решение некоторых задач на модели.

*Задача 1.* Построить середину отрезка *АВ.*

*1 случай*



- касательная к *а* из *О.* Докажем, что . Для этого достаточно рассмотреть



*2 случай*

Строим евклидову окружность *S* с диаметром *ОВ.*



Для доказательства того, что



достаточно рассмотреть

.



Заметим, что т.к.

,



то неевклидова середина отрезка *АВ* „тяжелее” евклидовой.

*Задача 2.* Построить биссектрису угла (*a,b).*



- евклидовы касательные к *a* и *b* соответственно в точке *А.*



- евклидова биссектриса



и .



*c= (O, OA)* - неевклидова биссектриса .



Доказательство основано на критерии конгруэнтности углов на модели Пуанкаре.

*Задача 3.* Дана Л-прямая *а* в точке *А,* не лежащая на *а*. Построить Л-прямую *b*, ортогональную *а,* и .



*1 случай*



Достаточно построить и тогда b - неевклидова прямая, проходящая через точки А и , т.к окружность, проходящая через пару инверсных точек, ортогональна окружности инверсии.



*2 случай*

*3 случай*



*(O, OA) =b*

*Задача 4.* Построить высоту, медиану, биссектрису в треугольнике.

Решение основано на задачах 1-3.

Проверим выполнимость аксиомы непрерывности в формулировке Дедекинда.

IV. Пусть все точки прямой разбиты на два класса так, что выполняются условия:

Оба класса не пустые;

Каждая точка прямой отнесена к одному и только одному из классов;

Каждый класс есть выпуклое множество.

Покажем, что в одном из классов существует граничная точка, т.е. такая точка, которая не лежит между двумя точками одного и того же класса.

Пусть все точки Л-прямой *а* разбиты на два класса и так, что выполнены условия 1-3 аксиомы Дедекинда.



Рассмотрим евклидову прямую , касающуюся Л-прямой *a* и параллельную *f.*



Установим соответствие между точками прямых *а* и , с помощью радиальных прямых. Очевидно, что это соответствие будет взаимно-однозначным. Поэтому все точки евклидовой прямой разобьются на два класса и так, что будут выполнены условия 1-3 аксиом Дедекинда.



Т.к. для евклидовой прямой аксиома Дедекинда справедлива, то в одном из классов или существует граничная точка .



Тогда соответствующая ей точка будет граничной в разбиении Л-прямой *а.*



Проверим выполнимость аксиомы Лобачевского на модели Пуанкаре.

V. Пусть дана Л-прямая *а* и Л-точка *А,* не принадлежащая *а.*

Покажем, что через точку *А* проходит, по крайне мере, две Л-прямые, не пересекающие *а.*

*1 случай*

*2 случай*



Построим евклидову полуокружность, ортогональную *f* и проходящую через точки *P* и *A*. Л-прямая *p* проходит через точку *А* и не пересекает *а.*

Аналогично строим Л-прямую *q*, проходящую через точку *А* и не пересекающую *а*.

Итак, существуют две Л-прямые *p* и *q*, проходящие через Л-точку *А* и не пересекающие Л-прямую *а*.

*Замечание.* Очевидно, что любая евклидова полуокружность, ортогональная *f* и проходящая через точку *А* и любую точку евклидова отрезка *QR*, не пересекает *а.* Таким образом, существует бесчисленное множество Л-прямых, проходящих через точку А и не пересекающих Л-прямую а.

Итак, доказана непротиворечивость геометрии Лобачевского.

В следующем параграфе покажем осуществление некоторых вопросов геометрии Лобачевского на модели Пуанкаре, где также используется инверсия.

## Глава 2. Непротиворечивость геометрии Лобачевского

## 1. Система аксиом геометрии Лобачевского

Схема аксиоматического построения геометрии выглядит следующим образом.

1. Рассматривается множество элементов произвольной природы, которые как-то условно называют и обозначают. Далее также условно обозначают операции и отношения между элементами этого множества.

2. Даётся список аксиом, выражающих свойства основных отношений или операций.

3. Даются определения остальных понятий и путём логических рассуждений выводятся теоремы.

Система аксиом геометрии Лобачевского включает в себя: восемь аксиом связи, четыре аксиомы порядка, пять аксиом конгруэнтности, аксиому непрерывности и аксиому Лобачевского.

Основные объекты: точка, прямая, плоскость.

Основные отношения: „принадлежать", „лежать между", „быть конгруэнтными”.

Аксиомы связи

. Каковы бы ни были две точки, существует прямая, проходящая через эти две точки.



. Каковы бы ни были две точки, существует не более одной прямой, проходящей через эти две точки.



. На каждой прямой лежат две точки. Существуют три точки, не лежащие на одной прямой.



. Каковы бы ни были три точки, существует плоскость, их содержащая. На каждой плоскости есть хотя бы одна точка.



. Для любых трёх точек, не лежащих на одной прямой, существует не более одной плоскости, содержащей эти три точки.



. Если две точки прямой принадлежат плоскости, то и вся прямая принадлежит этой плоскости.



. Если две плоскости имеют общую точку, то существует, по крайне мере, ещё одна общая точка.



. Существуют, по крайне мере, четыре точки, не лежащие в одной плоскости.



Аксиомы порядка

. Если имеет место ABC (точка В лежит между точками А и С), то А, В, С - три различные точки, лежащие на одной прямой, и имеет место СBA.



. Для любых двух точек А и В существует, по крайне мере, одна точка С такая, что имеет место АВС.



. Из любых трёх точек, лежащих на прямой, одна и только одна лежит между двумя другими.



. (Аксиома Паша). Пусть даны три точки А, В, С, не лежащие на одной прямой, и прямая *а*, не проходящая ни через одну из этих точек. Если на прямой *а* есть точка, лежащая между точками А и В, то на прямой *а* есть точка, лежащая либо между В и С, либо между А и С.



*Определение.* Отрезком АВ назовём множество всех точек С, лежащих между А и В, и сами эти точки.

*Обозначение. [*AB] - отрезок АВ.

*Определение*. Лучом ОА назовём множество всех точек Х, что имеет место .



*Обозначение. [*ОА) - луч ОА.

Аксиомы конгруэнтности

. Дан отрезок UV и луч А*а*. Тогда существует точка В [Aa) такая, что [AB] [UV] и [AB] [BA].



. Если [AB] [UV], [CD] [UV], то [AB] [CD].



. Если имеет место АВС и и [AB] [],



[BC] [], то [AC] [].



16

*Определение.* Углом назовём совокупность двух лучей с общим началом.

*Определение.* Треугольником АВС назовём совокупность отрезков АВ, ВС, СА.

. Дан угол (u,v) и луч А*а* с заданной полуплоскостью, тогда в указанной полуплоскости существует единственный луч [A*b*) такой, что (*а*,*b*) (u,v) и всякий угол конгруэнтен самому себе.



. Пусть дан АВС и, [AB] [AB], [AC] [AC], . Тогда.



Аксиома непрерывности

IV. Пусть все точки прямой разбиты на два класса так, что выполняются условия:

1. Оба класса не пусты.

2. Каждая точка прямой отнесена к одному и только одному из классов.

3. Каждый класс есть выпуклое множество.

Тогда в одном из классов существует граничная точка, т.е. такая точка, которая не лежит между двумя точками одного и того же класса.

Аксиома Лобачевского

V. Через точку, взятую вне прямой, в плоскости, определяемой этой прямой и точкой, можно провести по крайне мере две прямые, не пересекающие данную прямую.

В связи с аксиоматическим построением теории возникают следующие три вопроса является ли данная система аксиом:

1) непротиворечивой,

2) независимой,

3) полной.

Система аксиом называется *непротиворечивой*, если из неё нельзя получить путём логических рассуждений двух взаимно исключающих утверждений *a* и .



Система аксиом называется *независимой*, если ни одну из аксиом системы S нельзя вывести из остальных.

Система аксиом называется *полной*, если с помощью её можно доказать или опровергнуть любое предложение, сформулированное в терминах этой аксиоматики.

Исследование аксиоматики по этим трём вопросам связано с построением модели (реализации, интерпретации).

Построить или задать интерпретацию (модель) системы аксиом S - это значит:

1. Задать конкретное множество элементов произвольной природы, условно именуемых точками, прямыми, плоскостями;

2. Так определить отношения между элементами, условно выражаемые словами „принадлежать”, „между”, „быть конгруэнтным”, чтобы выполнялись все аксиомы системы S.

Имеет место следующая теорема:

*Теорема.* Система аксиом S непротиворечива, если она допускает хотя бы одну реализацию.

*Доказательство*. Допустим, что S - противоречива, т.е. S→*a* и S→. Пусть R - реализация S, тогда в R имеет место *a* и , что невозможно в силу конкретности основных понятий в R.

