***Пошукова робота на тему:***

Інтегрування виразів, що містять тригонометричні функції. Приклади первісних, що не є елементарними функціями. Використання таблиць неозначених інтегралів.

|  |
| --- |
| **План**   * Інтегрування виразів, що містять тригонометричні функції * Інтеграли вигляду  * Інтеграли вигляду  * Інтеграли вигляду   ·        Інтеграли вигляду   * Інтеграли вигляду( - ціле, додатне число)  * Інтеграли вигляду   **8.3.9. Інтегрування трансцендентних функцій**  а) Усі інтеграли вигляду  інтегруються в замкненому вигляді. Тут  - символ раціональної функції. Справді, підстановка  зводить цей інтеграл до вигляду  Приклад. За допомогою заміни інтеграл перетворюється в такий :  б)  Як уже зазначалося, інтеграли зводяться до розглядуваного. Тому інтеграл  нас цікавить не тільки сам по собі, а й  у зв’язку з тим, що й інші інтеграли зводяться до нього.  Усі інтеграли типу інтегруються в замкненому вигляді. Підстановка  перетворює інтеграл у такий:тобто до інтеграла, розглянутого в п.9.8.  Ймовірно, що способи інтегрування заданого інтеграла в розумінні більшої або меншої трудності залежатимуть від характеру функції : парна чи непарна вона за змінною  або , або і  і , або, можливо, і не володіє цими властивостями. Нехай   Очевидно, що в цьому випадку її можна подати   у формі  Якщо то    Тому  Звідси випливає така підстановка:  ,  тобто  - раціональна функція *.*  Отже, якщо в разі заміни на підінтегральна функція змінює знак, то доцільно є підстановка .  Цілком аналогічно, якщо в разі заміни  на   то доцільною є  підстановка  .  Розглянемо тепер випадок тобто функціяє парною як за , так і за . Очевидно, що .Якщо тепер знаки  i  замінити на протилежні, то, тобто   є парною за , тому  . Вважаючи, що , одержимо    Підстановка  зведе інтеграл до вигляду  Отже, у випадку  доцільною є заміна змінної .  Оскільки         ,  ,                      (8.26)  то ,  тобто підстановка  перетворить інтеграл до вигляду  .  Якщо  не задовольняє жодну із розглянутих умов, то  інтегрується за допомогою підстановки . Практично інтегруючи функцію перш за все варто встановити, чи задовольняє вона хоча б одну з умов  чи ні. Лише тоді, коли вона не задовольняє жодну, доцільно використати заміну , яку називають універсальною.  Приклад. 1.  Оскільки в разі заміни  на і   на підінтегральна функція не змінює знака, то підстановка  зведе інтеграл до вигляду  Приклад 2. .  Цей інтеграл не задовольняє жодної з указаних умов. Тому слід використати підстановку  , яка зведе інтеграл до вигляду   .   Якщо , то  .  Якщо , то  При .  При .  Приклад 3. .  Підстановка . З її допомогою інтеграл перетвориться в  .  в) Усі інтеграли вигляду   де - раціональна функція, інтегруються в замкненому вигляді. Цей висновок випливає з п.9.4.  г) Інтеграли вигляду  ( - ціле, додатне число) можна проінтегрувати відповідно за допомогою підстановок  В результаті матимемо  Аналогічно обчислюється і другий інтеграл.  д) Інтеграли вигляду  де - цілі невід’ємні числа, обчислюються, використовуючи формули тригонометрії для пониження степеня:                   (8.27)  Тоді  Піднісши до степеня і розкриваючи дужки, одержимо інтеграли, що містять  в парних і непарних степенях. Інтеграли з непарними степенями обчислюються, як показано у випадку  б). Парні показники степенів знову понижуємо за формулами (9.13). Продовжуючи так, дійдемо до інтегралів  які легко обчислюються.              Якщо хоча б один з показників від’ємний, то необхідно робити підстановку  (або ).              Інтеграли вигляду  можна  проінтегрувати, застосовуючи формулу Муавра. Маємо:            (8.28)  Звідси  Далі обчислимо:  Аналогічно    Тепер уже інтегрування двох інтегралів здійснюється легко для будь-яких скінчених цілих .  е) Усі інтеграли вигляду  можуть бути представлені в замкненому вигляді, якщо функція  є цілою раціональною функцією відносно синусів і косинусів величин, що стоять під знаком функції, а всі константи є дійсними числами.  Оскільки ціла раціональна функція будується лише на основі дій додавання, віднімання і множення ( зокрема піднесення до цілого додатного степеня ) , то кожний добуток двох множників можна подати у вигляді суми двох доданків на основі формул                        (8.29)  Застосовуючи  формули (8.29) послідовно до кожного члена, що є добутком кількох множників, функцію  можна подати як лінійну комбінацію синусів і косинусів, аргументи яких є лінійними функціями . Кожна така лінійна комбінація інтегрується елементарно.  Приклад.  є) Усі інтеграли виглядів де  є довільними дійсними константами, а  – довільний поліном, інтегруються у замкненому вигляді.  Цей висновок випливає з п.8.3.8.  ж) Інтеграли вигляду  за допомогою підстановки  зводяться до інтегралів від біномінальних диференціалів , які вже були розглянуті в п.8.3.8 є). Там також було з’ясовано, в яких випадках інтеграл від біномінального диференціала інтегрується в замкненому вигляді. Отже, інтеграл  виражається через елементарні функції, якщо 1) - ціле число; 2)- ціле число; 3)- ціле число. |