### Глава 1. Теоретические сведения о функциях

## 1.3. Числовые функции

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

## 1.3.1. Понятие числовой функции

Среди всего многообразия явлений природы существуют такие, в которых взаимосвязь величин настолько тесна, что, зная значение одной из них, можно определить и значение другой.

Пусть задано числовое множество Если каждому числу поставлено в соответствие единственное число y, то говорят, что на множестве D задана числовая функция:



|  |
| --- |
| y = f (x),  |

Множество D называется областью определения функции и обозначается D (f (x)). Множество, состоящее из всех элементов f (x), где называется областью значений функции и обозначается E (f (x)).

Число x часто называют аргументом функции или независимой переменной, а число y – зависимой переменной или, собственно, функцией переменной x. Число   соответствующее значению называют значением функции в точке и обозначают или

Для того чтобы задать функцию f, нужно указать:

1) ее область определения D (f (x));

2) указать правило f, по которому каждому значению ставится в соответствие некоторое значение y = f (x).

Запись   означает, что D (f (x)) = [–1; 2]. Если область определения не указана, то за область определения принимают множество всех значений аргумента, для которых данное выражение имеет смысл. Область определения иногда еще называют областью допустимых значений функции (ОДЗ). Для нахождения ОДЗ функции нужно проанализировать данное соответствие и установить встречающиеся запретные операции (деление на нуль, возведение в рациональную степень отрицательного числа, логарифмические операции над отрицательными числами и т. п.).

Функции f и g называются равными, если они имеют одну и ту же область определения D и для каждого значения этих функций совпадают. В этом случае пишут f (x) = g (x), или f = g. Если же значения этих функций совпадают лишь на некотором множестве   и то говорят, что функции равны на множестве   Так, например, функции f = 1 и равны на всем множестве , а функции и g = x равны на множестве

Пусть функции f (x) и g (x) определены на одном и том же множестве D. Тогда функция, значения которой в каждой точке равны f (x) + g (x), называется суммой функций  f и g и обозначается f + g. Точно так же определяются разность  f – g, произведение  f · g и частное  f / g двух функций (частное определено на множестве D, если на этом множестве g (x) ≠ 0).

Пусть функции y = g (x) и z = f (y) определены на множествах D и E соответственно, причем множество значений функции f содержится в области определения функции g. Тогда функция, принимающая при каждом значение f (g (x)), называется сложной функций или суперпозицией функций f и g и обозначается Так, функция z = sin (x – 1) является суперпозицией функций y = x – 1 и z = sin y.
Важно отметить, что в общем случае суперпозиция не совпадает с ; так, в нашем примере , а

Функции могут задаваться различными способами. Самый распространенный из них – аналитический, когда числовая функция задается при помощи формулы. Вот некоторые примеры.

* Формулой S (r) = πr2 задается функция зависимости площади круга от радиуса.
* Функция ºF (ºC) определяет перевод температуры из градусов Цельсия в градусы Фаренгейта:

* Если деньги положены в банк под p процентов годовых, а сумма, положенная в банк изначально, равна   то через n лет в банке будет – функция от количества лет, на которые положены средства  Эта формула называется формулой сложных процентов.

* При равномерном движении скорость тела является функцией времени: s (t) = v · t.
* Функция x (t) = A cos (ωt + φ) задает гармонические колебания. Здесь A – амплитуда колебаний, ω – круговая частота, φ – начальная фаза.
* Функция называется формулой радиоактивного распада. Здесь – начальное количество радиоактивного вещества, m (t) – текущее, T – период полураспада.

Функция может быть задана различными формулами на разных промежутках. Так, формулы

|  |
| --- |
| f (x) =  |

задают на множестве действительных чисел функцию f (x) = |x|, называемою модулем, а формулы

|  |
| --- |
| f (x) =  |

определяют функцию Дирихле. Иногда функция задается в виде таблицы численных значений. Наконец, функции могут задаваться при помощи графиков:

|  |  |
| --- | --- |
|

|  |
| --- |
|  |

 |
| График 1.3.1.1. График функции y = x2 + 1 на D = [–2; 2]. По числовым осям заштрихованы область определения и область значений функции.  |

Графиком функции y = f (x) в выбранной системе координат называется множество всех точек (x; y), для которых выполняется равенство y = f (x).

Для того, чтобы кривая на декартовой координатной плоскости была графиком функции, необходимо и достаточно, чтобы всякая прямая, параллельная оси ординат, либо не пересекалась с этой линией, либо пересекала ее в одной точке. Согласно этому определению окружность, например, не может быть графиком никакой функции, так как некоторым значениям x точек, принадлежащих этой кривой (например, абсциссе центра окружности), соответствуют два значения y.

Число a называется нулем функции f (x), если

|  |
| --- |
| f (a) = 0. |

График функции пересекает ось абсцисс в точках с абциссами, равными нулям функций.

Эскиз графика может быть построен выбором на оси OX нескольких значений аргументов xi, построением точек (xi, f (xi)) и соединением этих точек линиями. Если графиком функции является достаточно плавная кривая, то, соединяя полученные точки гладкой линией, мы получим эскиз искомого графика.

|  |
| --- |
| 1 |
| Рисунок 1.3.1.1. График функции y = [x].  |

Существуют функции, графики которых состоят из нескольких участков. К таковым, например, относится функция y = sign (x). График функции y = [x], где скобки означают взятие целой части числа, состоит из бесконечного количества отрезков. Наконец, ряд графиков функций не содержит ни одной «непрерывной» части. К таковым относится, например, числовая последовательность, которую можно определить как числовую функцию на множестве натуральных чисел

Эскиз графика строится по нескольким точкам; линия эскиза графика на чертеже всегда конечной толщины (в то время как в математике линия графика считается бесконечно тонкой). Все это приводит к тому, что узнать значение функции по графику можно лишь приближенно. Тем не менее график является удобным средством для исследования функции и во многих случаях используется, чтобы визуально представить ход изменения функции.

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

|  |
| --- |
|  |

## 1.3.2. Четность функций

Функция f (x) называется четной, если для любого выполняются равенства:
1) ,
2) f (–x) = f (x).

График четной функции на всей области определения симметричен относительно оси OY. Примерами четных функций могут служить y = cos x, y = |x|, y = x2 + |x|.

|  |  |
| --- | --- |
|

|  |
| --- |
|  |

 |
| График 1.3.2.1. График четной функции  |

|  |  |
| --- | --- |
|

|  |
| --- |
|  |

 |
| График 1.3.2.2. График нечетной функции  |

Функция f (x) называется нечетной, если для любого выполняются равенства:
1) ,
2) f (–x) = –f (x).

Иными словами функция называется нечетной, если ее график на всей области определения симметричен относительно начала координат. Примерами нечетных функций являются y = sin x, y = x3.

Не следует думать, что любая функция является либо четной, либо нечетной. Так, функция не является ни четной, ни нечетной, так как ее область определения несимметрична относительно начала координат. Область определения функции y = x3 + 1 охватывает всю числовую ось и поэтому симметрична относительно начала координат, однако f (–1) ≠ f (1).

Если область определения функции симметрична относительно начала координат, то эту функцию можно представить в виде суммы четной и нечетной функций.

Таковой суммой является функция Первое слагаемое является четной функцией, второе – нечетной.



|  |
| --- |
|  |
| Модель 1.8. Четные и нечетные функции.  |

Исследование функций на четность облегчается следующими утверждениями.

* Сумма четных (нечетных) функций является четной (нечетной) функцией.
* Произведение двух четных или двух нечетных функций является четной функцией.
* Произведение четной и нечетной функции является нечетной функцией.
* Если функция f четна (нечетна), то и функция 1/f четна (нечетна).

## 1.3.3. Нули функции

Рассмотрим вопрос о нахождении нулей функции и промежутков, где функция сохраняет знак.

|  |  |
| --- | --- |
|

|  |
| --- |
|  |

 |
| График 1.3.3.1. Нули функции  |

На показанном на рисунке графике функции y = f (x) видно, что эта функция имеет три нуля: x1, x2, x3. Функция положительна на каждом из промежутков (x1; x2) и (x3; b] и отрицательна на каждом из промежутков [a; x1) и (x2; x3). Эти данные можно занести в таблицу:

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| x | [a; x1) | x1 | (x1; x2) | x2 | (x2; x3) | x3 | (x3; b] |
| f (x) | – | 0 | + | 0 | – | 0 | + |

 |
| Таблица 1.3.3.1. |

Для нахождения нулей функции нужно решить уравнение f (x) = 0, а для нахождения промежутков знакопостоянства нужно решить неравенства f (x) > 0 и f (x) < 0.

Если на некотором промежутке функция непрерывна и не имеет корней, то она сохраняет знак на этом промежутке.

На этой теореме базируется метод интервалов решения неравенств.

## 1.3.4. Периодические функции

Функция f (x) называется периодической с периодом T ≠ 0, если выполняются два условия:

* если , то x + T и x – T также принадлежат области определения D (f (x));

* для любого выполнено равенство



|  |
| --- |
| f (x + T) = f (x). |

Поскольку то из приведенного определения следует, что f (x – T) = f (x).

Если T – период функции f (x), то очевидно, что каждое число nT, где , n ≠ 0, также является периодом этой функции.

Наименьшим положительным периодом функции называется наименьшее из положительных чисел T, являющихся периодом данной функции.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

 |
| График 1.3.4.1. График периодической функции  |

График периодической функции обычно строят на промежутке [x0; x0 + T), а затем повторяют на всю область определения.

Хорошим примером периодических функций могут служить тригонометрические функции y = sin x, y = cos x (период этих функций равен 2π), y = tg x (период равен π) и другие. Функция y = const также является периодической. Для нее периодом является любое число T ≠ 0.

|  |
| --- |
| 1 |
| Рисунок 1.3.4.1. Не следует думать, что периодическими бывают только тригонометрические функции. Функция y = [x], где [x] – целая часть числа x (наибольшее целое число, не превосходящее x) позволяет определить функцию y = {x}, где {x} – дробная часть числа x. По определению {x} = x – [x] (например, {3,7} = 0,7, {–6} = 0, {–4,2} = –4,2 – (–5) = 0,8). Дробная часть числа – функция с периодом T = 1.  |

В заключение отметим свойства периодических функций.

* Если f (x) – периодическая функция с периодом T, то функция g (x) = A · f (kx + b), где k ≠ 0 также является периодической с периодом .

* Пусть функции f1 (x) и f2 (x) определены на всей числовой оси и являются периодическими с периодами T1 > 0 и T2 > 0. Тогда если  то функция периодическая с периодом T, равным наименьшему общему кратному чисел


## 1.3.5. Монотонность функций

Функция f (x) называется возрастающей на промежутке D, если для любых чисел x1 и x2 из промежутка D таких, что x1 < x2, выполняется неравенство f (x1) < f (x2).

Функция f (x) называется убывающей на промежутке D, если для любых чисел x1 и x2 из промежутка D таких, что x1 < x2, выполняется неравенство f (x1) > f (x2).

|  |
| --- |
| 1 |
| Рисунок 1.3.5.1. Промежутки возрастания и убывания функции.  |

На показанном на рисунке графике функция y = f (x), возрастает на каждом из промежутков [a; x1) и (x2; b] и убывает на промежутке (x1; x2). Обратите внимание, что функция возрастает на каждом из промежутков [a; x1) и (x2; b], но не на объединении промежутков

Если функция возрастает или убывает на некотором промежутке, то она называется монотонной на этом промежутке.

Заметим, что если f – монотонная функция на промежутке D (f (x)), то уравнение f (x) = const не может иметь более одного корня на этом промежутке.

Действительно, если x1 < x2 – корни этого уравнения на промежутке D (f(x)), то f (x1) = f (x2) = 0, что противоречит условию монотонности.

Перечислим свойства монотонных функций (предполагается, что все функции определены на некотором промежутке D).

* Сумма нескольких возрастающих функций является возрастающей функцией.
* Произведение неотрицательных возрастающих функций есть возрастающая функция.
* Если функция f возрастает, то функции cf (c > 0) и f + c также возрастают, а функция cf (c < 0) убывает. Здесь c – некоторая константа.
* Если функция f возрастает и сохраняет знак, то функция 1/f убывает.
* Если функция f возрастает и неотрицательна, то  где , также возрастает.

* Если функция f возрастает и n – нечетное число, то fn также возрастает.
* Композиция g (f (x)) возрастающих функций f и g также возрастает.

Аналогичные утверждения можно сформулировать и для убывающей функции.

|  |
| --- |
|  |
| Модель 1.9. Свойства функции.  |

Точка a называется точкой максимума функции f, если существует такая ε-окрестность точки a, что для любого x из этой окрестности выполняется неравенство f (a) ≥ f (x).

Точка a называется точкой минимума функции f, если существует такая ε-окрестность точки a, что для любого x из этой окрестности выполняется неравенство f (a) ≤ f (x).

Точки, в которых достигается максимум или минимум функции, называются точками экстремума.

В точке экстремума происходит смена характера монотонности функции. Так, слева от точки экстремума функция может возрастать, а справа – убывать. Согласно определению, точка экстремума должна быть внутренней точкой области определения.

Если для любого  (x ≠ a) выполняется неравенство f (x) ≤ f (a)   то точка a называется точкой наибольшего значения функции на множестве D:



|  |
| --- |
|  |

Если для любого  (x ≠ b) выполняется неравенство f (x) > f (b)   то точка b называется точкой наименьшего значения функции на множестве D.



|  |
| --- |
|  |

Точка наибольшего или наименьшего значения может быть экстремумом функции, но не обязательно им является.

Точку наибольшего (наименьшего) значения непрерывной на отрезке функции следует искать среди экстремумов этой функции и ее значений на концах отрезка.

|  |  |
| --- | --- |
|

|  |
| --- |
|  |

 |
| График 1.3.5.1. Функция, ограниченная сверху.  |

|  |  |
| --- | --- |
|

|  |
| --- |
|  |

 |
| График 1.3.5.2. Функция, ограниченная снизу.  |

|  |  |
| --- | --- |
|

|  |
| --- |
|  |

 |
| График 1.3.5.3. Функция, ограниченная на множестве D.  |

Если существует число C такое, что для любого выполняется неравенство f (x) ≤ C, то функция f называется ограниченной сверху на множестве D.

Если существует число c такое, что для любого выполняется неравенство f (x) ≥ c, то функция f называется ограниченной снизу на множестве D.

Функция, ограниченная и сверху, и снизу, называется ограниченной на множестве D. Геометрически ограниченность функции f на множестве D означает, что график функции y = f (x), лежит в полосе c ≤ y ≤ C.

Если функция не является ограниченной на множестве, то говорят, что она не ограничена.

Примером функции, ограниченной снизу на всей числовой оси, является функция y = x2. Примером функции, ограниченной сверху на множестве (–∞; 0) является функция y = 1/x. Примером функции, ограниченной на всей числовой оси, является функция y = sin x.