**Про систему задач для вивчення інтеграла.**

Система задач для вивчення первісної та інтеграла в навчальному посібнику (1) недостатньо досконала. Завдання тут в основному зводяться до обчислення площ фігур (№1022-1027, 1037-1042, 1081-1087) і інтеграла (1028-1036, 1071-1080), тобто, так як і в задачниках з математичного аналізу для втузів, мають тренувальний характер. Між тим відомо, що різноманітність задач допомагає краще засвоїти вивчаюче поняття, його різні прояви. До того ж у запропонованих в (1) задачах недостатньо використовуються раніше засвоєні знання, поняття інтеграла тим самим немов ізолюється від іншого курсу алгебри та початків аналізу, при розв’язуванні задач не закріпляються раніше здобуті знання.

В методичній літературі є деякі спроби спростити систему вправ для вивчення первісної та інтеграла. Так, наведені деякі вправи у збірнику задач (3), але в більшості вони важкі для учнів XI класу й іноді далеко виходять за рамки шкільної програми. Деякі цікаві і змістовні вправи є в (4), (2), (5), але тут поміщені тільки деякі задачі.

В цій статті пропонуються задачі, для розв’язку яких крім знань про інтеграл застосовуються знання, уміння і навички з інших розділів алгебри і початків аналізу. При цьому розширюється клас функцій, інтеграли від яких можуть бути обчисленні учнями XI класу, досягається необхідна різноманітність задач, піднімається зацікавленість учнів у вивченні цього розділу програми.

# I

Відомо, що міцні, стійкі і гнучкі вміння формуються тоді, коли вони застосовуються разом із раніше здобутими уміннями і навичками. Саме таким чином знову сформовані уміння включаються у систему знань і умінь учнів. До того ж розв’язування задач, які потребують застосування раніше отриманих знань, істотно допомагає закріпленню вивченого і сприяє формуванню важливого вміння застосовувати знання в різноманітних ситуаціях.

На уроках у XI класі будуть корисними задачі, в яких знаходженню первісної (обчисленню інтеграла) передувало б спрощення або перетворення формули, що задає функцію. Такі наступні задачі.

1. *Знайдіть яку-небудь первісну для заданої функції:*

а) ;

б) ;

в) ;

г) ;

д) ;

е) ;

ж) ;

з\*) .

1. *Обчисліть інтеграл, виконавши перед тим необхідні перетворення підінтегральної функції:*

а) ;

б) ;

в) ;

г) ;

д) ;

е\*);

ж) ;

з) ;

и\*) ;

к) ;

л) .

Вказівка: В в) і д) потрібно скористатися визначенням модуля, в г) і л) застосувати рівність . Для перетворення підінтегральної функції в е) потрібно використати рівність . В ж) до результату приводить виділення цілої частини дробу. Інтеграл и) обчислюється двічі застосувавши тотожність .

3\*. *Перетворивши підінтегральну функцію, обчисліть інтеграл:*

а) ;

б) ;

в) ;

г) .

Додаткового часу, як і додаткових завдань, для розгляду наведених задач фактично не потрібно: їхній розв’язок потрібно зв’язати з повторенням.

Можна пропонувати і такі задачі на обчислення інтегралів, які потребують більш складніших перетворень тригонометричних виразів.

4\*. *Обчисліть інтеграл:*

а) ;

б) ;

в) ;

г) ;

д) ;

е) .

Розв’язок задачі 4 (д):

 Задачі 3–4 корисно розглядати на позакласних або факультативних заняттях.

Принесе користь розв’язування і наступних задач.

5. *Обчисліть, попередньо перетворивши підінтегральну функцію:*

а) ;

б) ;

в) ;

г) .

До цього часу розглядалися вправи, в яких потрібно було обчислити інтеграл, використовуючи для цього відомості із попереднього курсу алгебри і математичного аналізу. Але і задачам, в яких інтеграл відіграє допоміжну роль, потрібно відвести час на уроках або позакласних заняттях. Ось приклади таких вправ.

6. *Розв’яжіть рівняння:*

а) ;

б\*) ;

в\*) .

7. *Знайдіть всі значення  такі, що  і є коренем рівняння:*

а) ;

б) .

8. *Знайдіть множину невід’ємних коренів рівняння:* .

9. *Знайдіть множину значень , для яких правильна нерівність:*



а) ;

б) <4.

10\*. *Знайдіть найменше і найбільше значення інтеграла:*

а) ;

б) .

## II

Глибоке розуміння геометричного змісту інтеграла допомагає як обчислювати площі різних фігу, так і знаходити числові значення інтегралів, обчислювати які за відомими вивчаючими формулами не вдається.

Скориставшись геометричним змістом інтеграла, можна знаходити числові значення інтеграла від деяких функцій, методи інтегрування яких не відомі учням, а площі фігур, обмежених графіками підінтегральних функцій, можна обчислювати і без допомоги інтеграла.

11. *Виходячи із геометричного змісту інтеграла обчисліть:*

а) ;

б) ;

в\*) ;

г\*) ;

д\*) ;

е\*) .

В деяких випадках обчисленню інтеграла допомагають і додаткові міркування, наприклад застосування симетрії.

12\*. *Обчисліть: *.

Р о з в ’ я з о к. Значення інтеграла чисельно дорівнює площі криволінійної трапеції (рис. 1). Якщо доповнити цю трапецію до прямокутника, сторони якого задані рівнянням  а площа дорівнює  то із міркувань симетрії відносно точки  ясно, що .



x

y



0

1

-1

#### Рис.1

Геометричні міркування дозволяють знаходити первісні для деяких обернених функцій, які можна показати учням на позакласних заняттях. Нехай, наприклад, потрібно знайти первісну функції арксинус. Зобразимо графік функції ,  (рис.2а). зафіксуємо деяке значення аргументу , знайдемо на графіку значення . Ясно, що площа криволінійного трикутника, заштрихованого на (рис.2а), є . Графік функції і заштрихований трикутник відобразимо симетрично прямій  (рис. 2б). Тепер площу заштрихованого трикутника (а він конгруентний трикутнику на рис. 2а) можна обчислити за допомогою інтеграла, але вже від функції, оберненої до арксинуса, тобто від функції синус:



 Отже, . Це і є первісна арксинуса.

б)



а)





















 



0

 1

t

0

#### Рис.2

Таким самим чином можна знайти первісну ще для деяких функцій, попередньо встановивши, яка функція обернена до даної. Показаний прийом можна застосувати і для обчислення площ (див. [6]).

13\*. *Знайдіть яку-небудь первісну функції .*

14\*. *Обчисліть:*

а) ;

б) ;

15\*. *Знайдіть функції, обернені до даних, і які-небудь первісні для обернених функцій:*

а) ;

б) .

16\*. *Виберіть обернену функцію, первісна якої відома, і знайдіть одну із первісних оберненої функції.*

### III

Необхідно попереджати можливість формального підходу до обчислення інтегралів. Перед тим як обчислювати інтеграл, потрібно переконатися, що на відрізку інтегрування існує первісна підінтегральної функції: формула Нютона–Лейбніца використовується тільки для неперервних функцій, а вони мають первісну. Щоб не було непорозумінь, корисно привчати учнів перед формальним інтегруванням встановлювати, чи неперервна задана (під інтегралом) функція. З цією метою корисно розглянути наступну задачу:

17. *Обчислюючи*  *і* *, учень знайшов, що* *.*

*Чи правильні ці рівності? Якщо ні, то в чому заключається помилка?*

Аналіз помилки корисно зв’язувати з геометричними ілюстраціями і переконатися, що в точці  функція невизначена. Звідси, на проміжку  функція не є неперервною.

Дальше, час від часу, корисно пропонувати поряд із інтегралами від неперервних функцій і такі задачі, обчислення інтеграла в яких недопустиме через розрив функції на відрізку інтегрування, а також наступні задачі.

18. *Чи можна обчислити ;*

19\*. *При яких значеннях границі інтегрування існують наступні інтеграли:*

а) ;

б) ?

20\*. *Обчисліть:*

а) ;

б) ,

*якщо це можливо.*

В к а з і в к а. В задачі 18 підінтегральна функція має розрив в точці . В задачі 19 (а) границі інтегрування  і  мають бути або обидві від’ємними, або обидві додатніми. Інтеграл в задачі 19 (б) є зміст обчислювати тільки при . В задачі 20 (б) підінтегральна функція на відрізку інтегрування не визначена.

Запропоновані задачі, без сумніву, будуть допомагати свідомомому засвоєнню поняття первісної та інтеграла. Частина з них може бути розв’язаною на уроці, деякі, помічені зірочками, краще пропонувати на позакласних або факультативних заняттях.