***Пошукова робота на тему:***

*Розв’язування системи лінійних алгебраїчних рівнянь за правилом Крамера, методом Гаусса та за допомогою оберненої матриці. Теорема Кронекера-Капеллі, її застосування до дослідження і розв’язування системи лінійних алгебраїчних рівнянь.*

План

* Системи лінійних алгебраїчних рівнянь (СЛАР).
* Правило Крамера.
* Розв’язування СЛАР за допомогою оберненої матриці.
* Метод Гауса.
* Знаходження невід’ємних розв’язків СЛАР.
* Теорема Кронекера Капеллі.
* Однорідні системи.

**4.2. Системи лінійних алгебраїчних рівнянь**

Загальний вигляд системи  лінійних алгебраїчних рівнянь СЛАР з невідомими запишемо так:

                          (4.1)

Скорочено її можна записати

                                               (4.1/)

Коефіцієнти при невідомих запишемо у вигляді матриці , яку назвемо матрицею системи. Числа, що стоять в правих частинах рівнянь, утворюють стовпець , який називається стовпцем вільних членів. Якщо тепер через  позначити стовпець із невідомих, то систему (4.1) можна записати в матричному вигляді

                                                                            (4.1//)

            Система (4.1) називається *однорідною,* якщо в правій частині всі вільні члени дорівнюють нулю (  нульова матриця).

            Система рівнянь називається *неоднорідною*, якщо в її правій частині є хоча б один відмінний від нуля елемент.

            Означення. Сукупність чисел  називається *розв’язком системи* (4.1), якщо кожне рівняння системи перетворюється в числову рівність після підстановки чисел  замість відповідних невідомих  для всіх

            Система (4.1) може мати єдиний розв’язок, безліч розв’язок або взагалі не мати розв’язків.

            Системи, що не мають розв’язків, називаються *несумісними*, а які мають розв’язки *– сумісними*.

**4.2.1. Правило Крамера**

Розглянемо систему лінійних алгебраїчних рівнянь з  невідомими

                (4.2)

В цьому випадку матриця системи квадратна.

            Позначимо через  визначник матриці (із коефіцієнтів при невідомих)

                ,                       (4.3)

а через визначник, який одержується із визначника  шляхом заміни го стовпця стовпцем вільних членів

                  (4.4)

            Теорема (правило Крамера). Якщо визначник  системи  лінійних алгебраїчних рівнянь з невідомими (4.2) відмінний від нуля, то система має розв’язок і при тому єдиний, який знаходиться за

формулами

                                                 (4.5)

            Д о в е д е н н я. Доведемо спочатку, що  які обчислюються за формулами (4.5), є розв’язками системи (4.2). Підставивши  в довільне е рівняння системи (4.2), одержимо

Тобто, ми показали що довільне рівняння системи (4.2) перетворюється в числову рівність при роз’язках (4.7).

            Ми тут використали властивості сум, а також властивість визначників п.1.2.

            Доведемо тепер єдиність розв’язку. Доведемо це від протилежного. Нехай існує ще один розв’язок  Тоді будемо мати



Віднімаючи від першої рівності другу, одержимо

Якщо розв’язки не співпадають, то хоча б одна із різниць відмінна від нуля. Це означало б, що стовпці матриці лінійно залежні, а тоді визначник матриці  буде дорівнювати нулю, що протирічить умові теореми. Значить, наше припущення не вірне. Отже,  Теорема доведена.

**4.2.2. Розв’язування СЛАР за допомогою оберненої матриці**

  Систему (4.2) запишемо у матричному вигляді (4.1//)

де

Домноживши дану рівність зліва на обернену матрицю одержимо

Отже, розв’язок системи (4.4) в матричній формі запишеться так:

                                                        (4.6)

Приклад. Розв’язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь:

а) за формулами Крамера;   б) засобами матричного числення:

            а) Обчислимо визначник системи

обчислимо також

Тоді за формулами Крамера (4.7) одержимо

            б) Запишемо систему в матричній формі  де

  тоді

Знайдемо обернену матрицю :

 ,

    і



                        **4.2.3. Метод Жордана-Гаусса**

        У різноманітних галузях людських знань (наука, виробництво, економіка, теорія масового обслуговування, тощо) часто виникають задачі, розв’язування яких приводить до систем лінійних рівнянь, в яких кількість рівнянь не обов’язково дорівнює кількості невідомих. Невідомих може бути більше або менше від кількості рівнянь. Для розв’язування таких систем розроблено ряд методів, у тому числі й за допомогою визначників. Але найпоширеніший з них - метод Жордана-Гаусса, який не потребує попередніх досліджень на сумісність або несумісність. У процесі розв’язування завжди стає ясно, має система розв’язки чи не має, єдиний її розв’язок чи ні. Оскільки для розв’язування системи рівнянь методом Жордана-Гаусса потрібно на порядок менше математичних операцій, ніж при розв’язуванні за формулами Крамера, то метод Жордана-Гаусса став основним при побудові стандартних програм для сучасних комп’ютерів.

            Розглянемо систему лінійних рівнянь з невідомими (4.1).

Метод Жордана-Гаусса полягає в послідовному виключенні невідомих за допомогою елементарних перетворень:

1)      множення рівняння на деяке число ;

2)      заміна одного з рівнянь системи сумою з іншим рівнянням

тієї ж системи, помножимо на деяке число;

3)      видалення з системи рівнянь тотожностей .

З допомогою перетворення 2) можна виключити деяке невідоме із усіх рівнянь системи, крім одного.

            Виберемо для цього рівняння з номером 1), що містить невідоме :

                     .

            Це рівняння будемо називати ведучим, а - ведучим невідомим. Для виключення ведучого невідомого  з рівняння з номером



додамо до нього ведуче рівняння, помножене на деяке число . Тоді одержимо

           .                                (4.7)

Щоб виключити невідоме , прирівняємо до нуля коефіцієнт при , тобто  Звідси .

Тоді рівняння (4.7) матиме вигляд

 де

     (4.8)

Виконавши всі ці операції при                                                                                                     Виконавши всі ці операції при

,

одержимо систему рівнянь, в якій невідоме міститиметься тільки в -му рівнянні, а в інших рівняннях невідомого не буде.

                                                                                                     Таким самим способом, приймаючи в ролі ведучого інше рівняння, можна з усієї решти рівнянь виключити ведуче вибране невідоме. Продовжуючи цей процес доти, поки кожне рівняння побуде ведучим тільки один раз, прийдемо до системи рівнянь вигляду

           (4.9)

У ролі ведучого послідовно бралися рівняння 1-ше та -те, а в ролі ведучого невідомого бралися послідовно . Якщо при цьому жодне рівняння не перетворювалося в тотожність , то зрозуміло, вони далі в процесі перетворення не беруть участі і тому виключаються з системи.

У цьому випадку в системі (4.9) кількість рівнянь буде меншою, ніж .

Якщо описаний процес проводився в іншому порядку, то після його закінчення члени в рівняннях завжди можна переставити так, щоб система набрала вигляду (4.9).

У випадку, коли в процесі розв’язування системи рівнянь де-небудь ліва частина якогось рівняння перетворюється в нуль, а права-не дорівнює нулю, то це означає, що система несумісна і тому обчислення треба припинити.

У рівнянні (4.9) невідомі  називаються базисними, а решта змінних - небазисними. Базисний розв’язок складається з базисних змінних і нулів, причому нулям відповідають небазисні змінні. Якщо в базисі є стільки змінних, скільки рівнянь, то такий базис називається невиродженим. Якщо базисних змінних менше, ніж , то такий базис називається виродженим.

            Приклад. Розв’язати методом Жордана-Гаусса систему рівнянь:

                                                                                                     Р о з в ’ я з о к. Через те, що 1-, 4-, і 5-й стовпчики мають відповідно спільні множники 2, 3 і 5, то щоб мати справу з меншими коефіцієнтами, вигідно ввести нові змінні за формулами . І крім того, перейменувати невідомі  в  і , щоб уніфікувати найменування невідомих. Тоді одержимо

Щоб при дальших перетвореннях не переписувати на кожному кроці невідомі , запишемо систему у вигляді таблиці, цілком зрозумілої:

Приймемо в ролі ведучого перший рядок і в ньому ведучим-перший елемент; за допомогою його перетворимо в нулі в першому стовпчику всі елементи, крім першого.

Перший рядок помножимо по черзі на  , , ,  і результати додамо відповідно до другого , третього, четвертого і п’ятого рядків. В результаті одержимо:

.

У другому рядку всі елементи від’ємні, тому можна весь рядок помножити на –1. Це не вплине на результат, бо така операція рівносильна множенню другого рівняння  на –1. Аналогічні дії виконані з третім рядком.



                                                                                                     Остання таблиця одержана множенням другого рядка на (3), 5-го – на (–3), четвертого – на ( –1).





З останньої таблиці маємо  Врахувавши підстановки, знаходимо  Пояснення до останньої таблиці: в ній рівняння мають вигляд

З цих рівнянь знайдено

Відповідь:

**4.2.4. Знаходження невід’ємних розв’язків СЛАР**

           При розв’язуванні ряду задач, зокрема економічних, доводиться мати справу з системами лінійних рівнянь, розв’язки яких за змістом задачі повинні бути невід’ємними.

           При розв’язуванні ряду задач, зокрема економічних, доводиться мати справу з системами лінійних рівнянь, розв’язки яких за змістом задачі повинні бути невід’ємними.

           Знаходження таких розв’язків здійснюється теж за методом Жордана-Гаусса з деякою його модифікацією. Суть модифікації полягає ось у чому.

            1. Якщо в системі (4.1) у правих частинах рівняння є  величини то множенням відповідних рівнянь на –1 їх можна зробити додатними.

2. У ролі ведучих елементів треба брати лише додатні.

3. На кожному етапі перетворень у правій частині таблиць цієї останньої умови, чинять так:

а) у ролі ведучого елемента вибирають додатній елемент для конкретноготак, щоб відношення вільного члена  до було найменшим

б) застосувати процедуру Жордана-Гаусса, не забуваючи на кожному етапі вибрати ведучий елемент  відповідно до п.1

в) після всіх перетворень виписати розв’язок так само, як і при знаходженні довільних розв’язків. Якщо все виконувалось правильно, то невід’ємний розв’язок, якщо він існує, знайти завжди можна.

Легко довести, що при виконанні умови 1) у правій частині системи рівнянь не може появитись від’ємний елемент. Щоб переконатись у цьому розглянемо рівність : . Нехай у ньому вибрано так, що відношення - найменше з усіх подібних відношень до конкретного .

Тоді . Щоб  було невід’ємним, повинно бути , про що йдеться в п.1).

Приклад 1. Знайти невід’ємний розв’язок системи рівнянь:

Р о з в ’ я з о к. Запишемо матрицю цієї системи і здійснимо ряд послідовних її перетворень:

Від 1-го і 3-го рядка віднімемо 3, а від 4-го - 0,25.

(3-й рядок поділимо на 2)

(1-й рядок поділимо на 7)



(4-й рядок помножимо на 7)

    .

Відповідь: .

Базисними змінними тут є  а -небазисні змінні.

Приклад 2. Розставити числові коефіцієнти в реакції

                                                                                                     Р о з в ’ я з о к. Нехай - коефіцієнти в написаному рівнянні

Звідси

Звичайно, і ця система може бути розв’язана методом Жордана-Гаусса. Але вона така проста, що її можна розв’язати досить легко. Справді, враховуючи, що , з четвертого рівняння знайдемо, що Враховуючи це, решта рівнянь буде такою: Звідси Тоді

Отже, розв’язок має вигляд :

 Щоббуло цілим, повинно бути  Тоді

                                                                                                     Таким чином, рівняння буде таким:

.



**4.2.5. Теорема Кронекера-Капеллі. Однорідні системи**

             Розширеною матрицею  системи лінійних алгебраїчних рівнянь (4.1) називається матриця (до матриці системи приєднується стовпець вільних членів)

               Теорема (Кронекера-Капеллі). Система лінійних алгебраїчних рівнянь (4.1) сумісна тоді і тільки тоді, коли ранг матриці системи дорівнює рангу розширеної матриці

Ми приводимо цю теорему без доведення. Доведення див.,наприклад, в кн. Д.В.Беклемишев. Курс аналитической геометри и линейной алгебры. М.:Наука, 1984. с.165-166.

Знаходження рангу матриці див. в п.4.1.3.

Оскільки в однорідній системі лінійних алгебраїчних рівнянь завжди то така система завжди сумісна. Вона має розв’язок  який називається *тривіальним розв’язком*. Всі попередні результати про системи лінійних рівнянь вірні і для однорідних систем.

Множина розв’язків однорідної системи має дві важливі властивості, які ми приведемо без доведення.

10. Якщо деякі стовпці  і  - розв’язки однорідної системи, то їх сума також є розв’язком цієї системи. Добуток розв’язку однорідної системи на довільне число є розв’язком тієї ж системи.

20. Якщо ранг матриці однорідної системи дорівнює  то система має  лінійно незалежних розв’язків ( кількість невідомих системи).

             Приклад 1.  Знайти всі розв’язки системи лінійних однорідних рівнянь:

              Р о з в ’ я з о к. Ця  система однорідна, але тут 4 рівняння, 5 невідомих.

Перший рядок помножимо по черзі на (-1), (-3), (-1) і додамо  відповідно до 2-го, 3-го і 4-го рядків.

Четвертий рядок помножимо по черзі на 20, 11, -1 і додамо  відповідно до 2-го, 3-го і 4-го рядків.

Другий рядок помножимо на (-1), 7 і додамо  відповідно до 1-го і 3-го рядків.

.

З останньої таблиці маємо

або

де С-довільна константа.

                                                                                                     Оскільки

 то

Тоді система має  лінійно незалежний розв’язок (одна вільна невідома, наприклад ).

            Приклад 2. При яких значеннях  система рівнянь

має ненульові розв’язки? Знайти ці розв’язки.

            Р о з в ’ я з о к. Система рівнянь може мати ненульові розв’язки, якщо  , тобто

.

Розкладемо визначник за елементами першого рядка:

.

Звідси .

            Але якщо , то перше і друге рівняння виявились однаковими. Тому одне з них можна відкинути. Тоді матимемо систему

Якщо вважати вільним невідомим, то

тобто звідси .           Тоді з першого рівняння матимемо . Отже,  Якщо вважати

то

де - довільне число, відмінне від нуля. Надаючи величині довільних числових значень, будемо одержувати конкретні розв’язки. Як видно, система має безліч розв’язків, бо кожному відповідає якийсь розв’язок, наприклад, при матимемо

