***Пошукова робота на тему:***

*Застосування подвійних інтегралів до геометричних і фізичних задач. Обчислення інтеграла Пуассона.*

**План**

* Застосування подвійних інтегралів до геометричних і фізичних задач
* Маса пластинки
* Статичні моменти і центр ваги пластинки
* Момент інерції пластинки
* Обчислення інтеграла Пуассона

**11.5.  Застосування подвійних інтегралів**

**до задач механіки**

**Визначення маси пластинки**. Нехай тонка пластинка розміщена в площині  і займає область . Товщину пластинки вважаємо настільки малою, що зміною густини та товщиною можна знехтувати.



            Поверхневою густиною такої пластинки в даній точці називається границя відношення маси площадки до її площі за умови, що площадка стягується до даної точки.

            Означена таким чином поверхнева густина залежатиме тільки від розміщення точки, тобто вона буде функцією її координат:. Знайдемо масу неоднорідної пластинки. Для цього розіб’ємо область , яку займає пластинка, на частинні області  з площадками  (рис. 11.16). Вибираємо в кожній області  довільну точку  і вважаємо, що густина в усіх точках елементарної області стала і дорівнює густині  у вибраній точці. Тоді для маси пластинки можна скласти приблизний вираз у вигляді інтегральної суми.



                                       .



            Переходячи  до границі за умови, що  і кожна елементарна область стягується в точку, дістаємо формулу для обчислення маси пластинки:



                                   .                      (11.29)



|  |
| --- |
|  |
|  |  |

                                          Рис.11.16

**Статичні моменти і центр ваги пластинки .** Перейдемо до обчислення статичних моментів пластинки відносно осей координат. Якщо зосередити в точках  маси відповідних елементарних областей, то статичні моменти отриманої системи матеріальних точок можна записати так:



,   .



Переходячи до границі за звичайних умов і замінюючи інтегральні суми інтегралами, матимемо,

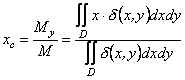


.                         (11.30)

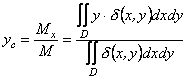


            Як і у випадку означеного інтеграла, знаходимо координати центра ваги пластинки:

                    ,



.                      (11.31)



**Моменти інерції пластинки.** Моментом інерції матеріальної точки масою відносно якої-небудь осі називається добуток маси на квадрат відстані точки від цієї осі.



            Метод складання виразів для моментів інерції пластинки відносно осей координат такий самий , як і для обчислення статичних моментів. Тому наведемо лише формули для моментів інерції відносно координатних осей:

         ,  (11.32)



|  |
| --- |
|  |
|  |  |

                 Рис.11.17                              Рис.11.18

Зазначимо, що інтеграл  називається центробіжним моментом інерції;  він позначається .



            У механіці розглядається полярний момент інерції точки, що дорівнює добутку маси точки на квадрат її відстані до даної точки -полюса. Полярний момент інерції пластинки відносно початку координат визначається за формулою

.                     (11.33)



Отже , очевидно, .



            Приклад 1. Обчислити масу неоднорідної пластинки, обмеженої лініями  якщо поверхнева густина розподілу мас



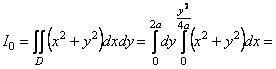
            Р о з в ‘ я з о к. За формулою (11.29) знаходимо (рис. 11.17):



            Приклад 2. Знайти момент інерції  площі, обмеженої параболою , прямою  і віссю  (11.18).



            Р о з в ‘ я з о к. Центральний момент інерції обчислюємо за формулою (11.33)



.



**11.6. Інтеграл Пуассона**

                Обчислимо інтеграл     Цей інтеграл називається інтегралом Пуассона.



                Розглянемо подвійний інтеграл



де область інтегрування є круг



Перейшовши до полярних координат одержимо



Якщо тепер необмежено збільшувати радіус  тобто необмежено розширяти область інтегрування, то одержимо невласний подвійний інтеграл:



Можна показати, що інтеграл  прямує до границі якщо область  довільної форми розширюється на всю площину.



            Якщо , зокрема, область  квадрат зі стороною  і центром в початку координат, то



Тоді



і

                       (11.34)

