# Решение задач оптимизации в Excel

# Построение математической модели

Фирма рекламирует свою продукцию с использованием четырех средств: телевизора, радио, газет и рекламных плакатов. Маркетинговые исследования показали, что эти средства приводят к увеличению прибыли соответственно на 10, 5, 7 и 4 доллара в расчете на 1 доллар, затраченный на рекламу. Распределение рекламного бюджета по различным видам рекламы подчинено следующим ограничениям:

а) Полный бюджет составляет 500000 долларов;

b) Следует расходовать не более 40% бюджета на телевидение и не более 20% бюджета на рекламные щиты;

с) Вследствие привлекательности для молодежной части населения различных музыкальных каналов на радио по этой позиции следует расходовать по крайней мере половину того, что планируется на телевидение.

Необходимо:

1. Сформулировать и решить задачу распределения средств по различным источникам для получения максимальной прибыли от рекламы;
2. Объяснить смысл данных отчета по устойчивости;
3. Определить изменится ли оптимальный план распределения средств, если увеличение прибыли от газетной рекламы снизится до 5 долларов в расчете на 1 доллар, затраченный на рекламу;
4. Определить, в какой вид рекламы будет выгоднее вложить дополнительные средства в случае увеличения бюджета фирмы.

Составим математическую модель задачи, выбрав в качестве переменных , *х4* - количество средств, затраченных на телевидение, рекламные плакаты, радио и газеты соответственно. Тогда ожидаемая прибыль от рекламы может быть подсчитана по формуле

 (1)

Переменные задачи удовлетворяют ограничениям





 (2)



в левых частях которых вычислены затраты денежных ресурсов на телевидение, радио, газеты и рекламные плакаты, а в правых частях записаны максимально возможные запасы средств на эти ресурсы. Учитывая, что переменные задачи по своему экономическому смыслу не могут принимать отрицательные значения, получаем математическую модель задачи оптимального распределения денежных ресурсов с целью получения максимального дохода от рекламы.











.

Очевидно, что построенная модель имеет линейную структуру и, следовательно, является задачей линейного программирования.

# Создание электронной модели

Чтобы привлечь компьютер к решению этой задачи необходимо ввести исходные данные на лист Excel.

Сначала заносим в таблицу неизменяемые данные, а затем заполняем изменяемые ячейки, в которых расположены компоненты плана . На этапе ввода исходных данных сюда заносятся любые числа, например, единицы. После решения в этих ячейках будут находиться оптимальные значения переменных. Целевая функция (суммарный доход) и левые части ограничений (Затраты по видам реклам) подсчитываются в соответствие с составленной моделью по формуле (1) и левым частям (2).

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Вид рекламы | Х1 | Х2 | Х3 | Х4 | Суммарный  доход |
| План запуска рекламы | 1 | 1 | 1 | 1 |
| Прибыль от 1 затраченного $ | 10 | 4 | 5 | 7 | 26 |

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Затраты по видам реклам | Затраты по видам реклам | | | | | Прибыль от вида рекламы | Запасы денежных  ресурсов  (тыс. $) |
| Х1 | Х2 | | Х3 | Х4 |
| На телевидение | 1 | | 0 | 0 | 0 | 1 | 200 |
| На рекламные щиты | 0 | | 1 | 0 | 0 | 1 | 100 |
| На радио | 0 | | 0 | 1 | 0 | 1 | 100 |
| На газеты | 0 | | 0 | 0 | 1 | 1 | 100 |
| Общие затраты на все виды реклам | 1 | | 1 | 1 | 1 | 4 | 500 |

# Отчет по результатам

Отчет состоит из трех таблиц, расположенных на одном листе книги Excel.

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  | |  |  |  |  |  |
| Целевая ячейка (Максимум) | | | |  |  |  |  |
|  | **Ячейка** | **Имя** | | **Исходное значение** | **Результат** |  |  |
|  | $F$3 | Прибыль от 1 затраченного $ Сумм-ый доход | | 26 | 3700 |  |  |
|  |  |  | |  |  |  |  |
|  |  |  | |  |  |  |  |
| Изменяемые ячейки | | | |  |  |  |  |
|  | **Ячейка** | | **Имя** | **Исходное значение** | **Результат** |  |  |
|  | $B$2 | | План запуска рекламы Х1 | 1 | 200 |  |  |
|  | $C$2 | | План запуска рекламы Х2 | 1 | 0 |  |  |
|  | $D$2 | | План запуска рекламы Х3 | 1 | 200 |  |  |
|  | $E$2 | | План запуска рекламы Х4 | 1 | 100 |  |  |
|  |  | |  |  |  |  |  |
|  |  | |  |  |  |  |  |
| Ограничения | | | |  |  |  |  |
|  | **Ячейка** | | **Имя** | **Значение** | **Формула** | **Статус** | **Разница** |
|  | $F$43 | | Бюджет затрачиваемый на рекламу | 500 | $F$43<=$G$12 | связанное | 0 |
|  | $B$2 | | План запуска рекламы Х1 | 200 | $B$2<=$G$8 | связанное | 0 |
|  | $C$2 | | План запуска рекламы Х2 | 0 | $C$2<=$G$9 | не связан. | 100 |
|  | $D$2 | | План запуска рекламы Х3 | 200 | $D$2>=$G$10 | не связан. | 100 |
|  | $E$2 | | План запуска рекламы Х4 | 100 | $E$2<=$G$11 | связанное | 0 |
|  |  | |  |  |  |  |  |

В первой таблице выводятся сведения о целевой функции. В столбце Исходное значение приведено значение целевой функции до начала вычислений, в столбце Результат - после оптимизации.

Следующая таблица содержит значения искомых переменных (изменяемых ячеек) до и после решения задачи.

оптимизация математическая электронная модель

Последняя таблица показывает значения левых частей ограничений на оптимальном решении задачи. В столбце Формула приведены зависимости, которые были введены в диалоговом окне Поиск решения, в столбце Разница показано количество неиспользованного ресурса. Если ресурс дефицитен, т.е. используется полностью, то в столбце Статус указывается связанное (соответствующее ограничение активно); при неполном использовании ресурса в этом столбце указывается не связанное (ограничение не активно).

Из отчета по результатам применительно к данной задаче видим, что оптимальный план распределения средств состоит в еженедельных затратах на телевидение в размере 200 000$, на газеты в размере 100 000$ и на радио в размере 200 000$, а вкладывать денежные средства в рекламные щиты не выгодно. Таким образом , и максимальный суммарный доход  000$. При этом полный бюджет на рекламу продукции используются полностью, т.е. является дефицитным, а также денежные средства отпущенные на телевидение и газеты расходуется полностью и также являются дефицитными, а денежные средства на рекламные щиты расходовать нецелесообразно.

# Отчет по устойчивости

Отчет по устойчивости содержит информацию, позволяющую провести постоптимальный анализ решения задачи. Цель анализа заключается в определении таких границ изменения исходных данных задачи (коэффициентов целевой функции и правых частей ограничений), при которых ранее найденный оптимальный план сохраняет свою оптимальность и в изменившихся условиях.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  | |  |  |  |  |  |  |
| Изменяемые ячейки | | | |  |  |  |  |  |
|  |  |  | | **Результ.** | **Нормир.** | **Целевой** | **Допустимое** | Допустимое |
|  | **Ячейка** | **Имя** | | **значение** | **стоимость** | **Коэффициент** | **Увеличение** | Уменьшение |
|  | $B$2 | План запуска рекламы Х1 | | 200 | 5 | 10 | 1E+30 | 5 |
|  | $C$2 | План запуска рекламы Х2 | | 0 | -1 | 4 | 1 | 1E+30 |
|  | $D$2 | План запуска рекламы Х3 | | 200 | 0 | 5 | 2 | 1 |
|  | $E$2 | План запуска рекламы Х4 | | 100 | 2 | 7 | 1E+30 | 2 |
|  |  |  | |  |  |  |  |  |
| Ограничения | | | |  |  |  |  |  |
|  |  |  | | **Результ.** | **Теневая** | **Ограничение** | **Допустимое** | Допустимое |
|  | **Ячейка** | **Имя** | | **значение** | **Цена** | **Правая часть** | **Увеличение** | Уменьшение |
|  | $F$43 | Бюджет затрачиваемый на рекламу | | 500 | 5 | 500 | 1E+30 | 100 |
|  |  |  | |  |  |  |  |  |

Отчет состоит из двух таблиц, расположенных на одном листе книги Excel.

В первой таблице (Изменяемые ячейки) приводится следующая информация о переменных:

* результирующее значение - оптимальные значения переменных;
* нормированная стоимость - ее величина равна значению соответствующей симплексной оценки с противоположным знаком. Для невыпускаемой продукции нормированная стоимость показывает, на сколько изменится целевая функция при принудительном включении единицы этой продукции в оптимальное решение;
* коэффициенты целевой функции;
* предельные значения приращения коэффициентов целевой функции, которые показывают на сколько можно увеличить и уменьшить каждый целевой коэффициент в отдельности, сохраняя при этом оптимальные значения переменных.

Во второй таблице (ограничения) приводятся аналогичные значения для ограничений задачи:

* величины использованных ресурсов (левые части ограничений) при оптимальном плане выпуска продукции;
* теневые цены, т.е. оптимальные значения двойственных переменных, которые показывают, как изменится целевая функция при изменении соответствующего запаса ресурса на единицу;
* исходные запасы ресурсов (правые части ограничений);
* предельные значения приращений ресурсов (их допустимое увеличение и уменьшение), при которых сохраняется оптимальный план двойственной задачи и базисный набор переменных, входящих в оптимальное решение исходной задачи (ассортимент выпускаемой продукции).

Используем результаты отчета по устойчивости для проведения постоптимального анализа в данной задаче:







Исследуем сначала влияние на оптимальный план изменений коэффициентов целевой функции - прибыль от 1 затраченного $ на рекламу определенного вида.

Из первой таблицы следует, что оптимальный план  затрат на рекламу не изменится, если первоначальная прибыль  долл. рекламы Х1 возрастет на 1Е+30 доллара или уменьшится на 5 доллара. Другими словами, условие сохранения оптимального плана  при изменении прибыли от рекламы Х1 имеет вид:  или .

Аналогично, условие сохранения оптимального плана  при изменении прибыли  рекламы Х3 имеет вид:  или , и условие сохранения оптимального плана  при изменении прибыли  рекламы Х4 имеет вид:  или .

Наконец, при изменении прибыли от рекламы Х2 ранее найденный план  останется оптимальным, если исходная цена  возрастет не более чем на 1 доллар. В то же время любое уменьшение цены  не влияет на оптимальный план , так как число  равно , т.е. практически является бесконечно большим числом. Таким образом, условие сохранения оптимальности плана  при изменении цены  примет вид . Это означает, что рекламу Х2 не выгодно запускать (), если прибыль от нее будет не выше 5 долларов. Если же прибыль  превысит 5 долларов от использования рекламных щитов, то план  перестанет быть оптимальным, и в новом оптимальном решении  будет положительным т.е. использование рекламы в виде рекламных щитов станет выгодным.

# Отчет по пределам

Третий отчет для данной задачи, называемый отчетом по пределам, состоит из двух таблиц.

Первая таблица в комментариях не нуждается.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  | **Целевое** |  |  |  |  |  |  |  |
| **Ячейка** | **Имя** | **Значение** |  |  |  |  |  |  |
| $F$3 | Прибыль от 1 затраченного $ Сумм-ый доход | 3700 |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  | **Изменяемое** |  |  | **Нижний** | **Целевой** |  | **Верхний** | **Целевой** |
| **Ячейка** | **Имя** | **Значение** |  | **предел** | **результат** |  | **предел** | **результат** |
| $B$2 | План запуска рекламы Х1 | 200 |  | 0 | 1700 |  | 200 | 3700 |
| $C$2 | План запуска рекламы Х2 | 0 |  | 0 | 3700 |  | -1,15597E-09 | 3700 |
| $D$2 | План запуска рекламы Х3 | 200 |  | 100 | 3200 |  | 200 | 3700 |
| $E$2 | План запуска рекламы Х4 | 100 |  | 0 | 3000 |  | 100 | 3700 |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |

Во второй таблице показано, в каких пределах может изменяться выпуск продукции, вошедшей в оптимальное решение, при сохранении структуры оптимального плана выпуска:

* приводятся значения  в оптимальном решении;
* приводятся нижние и верхние пределы изменения значений  и значения целевой функции при выпуске данного типа продукции на нижнем и верхнем пределах.

Так например, если из оптимального плана исключить запуск рекламы Х1, положив  и сохранить оптимальные значения остальных переменных, то доход от рекламы продукции будет равен



Значения целевой функции - дохода от рекламы продукции, вошедшей в оптимальное решение на верхних пределах везде равно максимальной величине 3700 долларов.

Рассмотренный пример показывает, как использование средства "Поиск решения" облегчает задачу принятия оптимальных решений в экономике.