ЕДИНАЯ ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ КЛАССИЧЕСКИХ ПОЛЕЙ

Д.А. Дзякович

(dimstein@list.ru)

Днепропетровский национальный университет

Днепропетровск, Украина.

Март, 2007 г.

Сформулирована единая геометрическая теория гравитации и электромагнетизма. В основу теории положена геометрия Римана-Картана с полностью антисимметричным кручением, которая используется в качестве геометрии четырёхмерного пространственно-временного континуума. В рамках геометрического формализма данной теории удаётся найти идеальную геометрическую интерпретацию классического электромагнитного поля и составить единый геометрический лагранжиан. Для получения уравнений поля применяется вариационный принцип, при помощи которого выводятся обобщённые полевые уравнения для гравитационного и электромагнитного полей. Новые уравнения поля очень хорошо согласуются с известными физическими законами, но предполагают наличие у фотона ненулевой массы покоя, величина которой гораздо меньше верхнего экспериментального предела.

---

1. Введение

Исчерпывающее рациональное объяснение физической реальности возможно лишь путём сведения всего многообразия явлений к единой теоретической основе. В качестве последней наиболее разумно выбрать геометрию пространственно-временного континуума, поскольку пространство и время – наиболее фундаментальные понятия.

Как известно, в природе существует два классических физических поля – гравитационное и электромагнитное. Эти поля являются силовыми (влияют на движение находящихся в них частиц материи) и действуют на макроскопическом уровне. Не смотря на специфические особенности каждого из полей, классические гравитационное и электромагнитное поля являются однотипными физическими объектами.

До сих пор в теории поля удалось удовлетворительно объяснить с геометрической точки зрения только гравитацию, в то время как электромагнитные явления такого объяснения не получили и рассматриваются отдельно от гравитационных. При этом электромагнитное поле вводится в качестве отдельной физической реальности, заполняющей пространственно-временной континуум, а гравитационное поле рассматривается как геометрическое свойство самого континуума. Применение принципиально различных подходов для описания однотипных физических объектов – классических силовых полей – свидетельствует о незавершённости теории поля даже в её классическом (доквантовом) варианте. Единство природы требует единообразного теоретического описания классических взаимодействий, для осуществления которого гравитация и электромагнетизм должны быть сведены к единой геометрической основе.

Электромагнитное взаимодействие в отличие от гравитационного не универсально (электромагнитное поле действует на все частицы по-разному, в зависимости от заряда частицы). Это принципиальное различие в характере двух взаимодействий указывает на существование двух разных полей – гравитационного и электромагнитного. Однако, нет никаких оснований полагать, что эти поля должны иметь принципиально разную природу. Ниже будет показано, что оба поля могут иметь геометрическую природу и описываться при этом различными геометрическими величинами, позволяющими учесть особенности каждого из взаимодействий.

Представленный ниже вариант единой геометрической теории поля является наиболее естественным и простым обобщением теории гравитации Эйнштейна (и электродинамики Максвелла), реализующим геометрическое единство гравитации и электромагнетизма. В результате этого обобщения классические силовые поля и соответствующие им взаимодействия описываются в рамках одной геометрической теории.

2. Основные положения

Для построения единой геометрической теории поля необходимо обобщить геометрические основы теории гравитации Эйнштейна таким образом, чтобы они включали также и характеристики электромагнитного поля. Наиболее естественный способ такого обобщения – применение геометрии Римана-Картана в качестве геометрии четырёхмерного пространственно-временного многообразия [14]. При этом мы не только избегаем необходимости введения дополнительных и ничем не обоснованных геометрических гипотез искусственного характера, но и избавляемся от одной из них: мы уже не будем произвольно предполагать, что в пространстве событий всегда можно ввести голономные координаты (то есть, что связность симметрична по нижним индексам).

Отличительной особенностью геометрии Римана-Картана является наличие тензора кручения, который в общем случае может иметь 24 независимые компоненты.

Для определения математической структуры поля будем исходить из вариационного принципа, позволяющего вывести полевые уравнения для данного лагранжиана. Последний в геометрической теории поля должен быть скомбинирован из геометрических величин. Как и в теории Эйнштейна будем строить полевой лагранжиан исключительно из компонент тензора кривизны Риччи (но не только путём образования скалярной кривизны).

Следует отметить, что в настоящей статье выбрана пространственноподобная сигнатура, поэтому все формулы и уравнения, зависящие от метрики, справедливы для сигнатуры (−,+,+,+).

Кроме приведенных выше соображений в основе предлагаемой единой геометрической теории поля лежат следующие положения.

A) Пространственно-временной континуум в электромагнитном поле имеет мнимое кручение.

B) Геодезические линии пространственно-временного континуума совпадают с линиями экстремальной длины.

C) Полевой лагранжиан квадратичен по тензору Риччи и имеет вид, подобный выражению для полного квадрата.

Положение A связывает электромагнитное поле с мнимым кручением пространственно-временного континуума, которое характеризуется тензором третьего ранга, а положение B определяет особые свойства симметрии этого тензора. Несмотря на то, что положение B в теории гравитации Эйнштейна является тривиальным, оно имеет очень большое значение для теории поля, основанной на геометрии Римана-Картана. Это положение придаёт теории простоту и изящность, а также позволяет найти простую и естественную геометрическую интерпретацию для электромагнитного поля. Положение C позволяет определить вид полевого лагранжиана, при помощи которого формулируется вариационный принцип для пустого пространства.

Согласно положению A пространственно-временной континуум, заполненный электромагнитным полем, имеет кручение, характеризуемое тензором кручения $\Omega^{\alpha}_{\cdot\mu\nu}$ с мнимыми компонентами, который антисимметричен по последним двум индексам $\left(\Omega^{\alpha}_{\cdot\mu\nu} = \Omega^{\alpha}_{\cdot[\mu\nu]}\right)$:

(1)
$$\Omega^{\alpha}_{\cdot\mu\nu} = \Delta^{\alpha}_{\mu\nu} - \Delta^{\alpha}_{\nu\mu}$$

где $\Delta^{\alpha}_{\mu\nu}$ – аффинная связность континуума. Поэтому аффинная связность в общем случае несимметрична. Согласно условию ковариантного постоянства метрического тензора несимметричная связность $\Delta^{\alpha}_{\mu\nu}$ определяется выражением:

(2)
$$\Delta^{\alpha}_{\mu\nu} = \Gamma^{\alpha}_{\mu\nu} + K^{\alpha}_{\cdot\mu\nu}$$

где $K^{\alpha}_{\cdot\mu\nu}$ – тензор конторсии, который антисимметричен по первым двум индексам $\left(K_{\alpha\mu\nu} = K_{[\alpha\mu]\nu}\right)$, а $\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}$ – символы Кристоффеля (приложение, п. 1-3).

Выясним теперь какими свойствами будут обладать тензор кручения и тензор конторсии с учётом положения В. Уравнения геодезических (линий постоянного направления) и уравнения экстремалей (линий экстремальной длины) имеют вид:

(3) $$\frac{d^2x^\mu}{ds^2} + \Delta^\mu_{(\alpha\beta)}\frac{dx^\alpha}{ds}\frac{dx^\beta}{ds} = 0$$

и

(4) $$\frac{d^2x^\mu}{ds^2} + \Gamma^\mu_{\alpha\beta}\frac{dx^\alpha}{ds}\frac{dx^\beta}{ds} = 0$$

Уравнения (3) описывают геодезические, а уравнения (4) соответствуют экстремалям. Согласно положению В уравнения (3) и уравнения (4) должны совпадать, следовательно, должно выполняться равенство:

(5) $$\Delta^\mu_{(\alpha\beta)} = \Gamma^\mu_{\alpha\beta}$$

В совокупности с выражением (2) это равенство приводит к соотношению:

(6) $$\Delta^\mu_{[\alpha\beta]} = K^{\mu}_{\cdot\alpha\beta}$$

которое означает, что тензор конторсии антисимметричен так же и по последним двум индексам. Другими словами, тензор конторсии должен быть полностью антисимметричен $\left(K_{\alpha\mu\nu} = K_{[\alpha\mu\nu]}\right)$. Согласно выражениям (1) и (6) тензор кручения в этом случае связан с тензором конторсии соотношением

(7) $$\Omega^{\alpha}_{\cdot\mu\nu} = 2K^{\alpha}_{\cdot\mu\nu}$$

и, следовательно, тоже полностью антисимметричен $\left(\Omega_{\alpha\mu\nu} = \Omega_{[\alpha\mu\nu]}\right)$. Таким образом, положение В приводит к полной антисимметрии тензора конторсии и тензора кручения. Кроме того, выражение для мнимого кручения (7) означает также мнимость конторсии. Поэтому все компоненты тензора конторсии мнимые.

3. Геометрия пространственно-временного континуума

Описание геометрических свойств пространственно-временного континуума в геометрии Римана-Картана осуществляется при помощи метрического тензора, с которым связано гравитационное взаимодействие, тензора кручения (или тензора конторсии), с которым связывается электромагнитное взаимодействие, и тензора кривизны, который используется для построения уравнений поля.

1) Метрика. Элемент длины в пространственно-временном континууме определяется выражением:

(8) $$ds^2 = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu$$

Метрический тензор $g_{\mu\nu}$ подчиняется условию ковариантного постоянства $\nabla_\alpha g_{\mu\nu} = 0$, где ∇_α – оператор ковариантного дифференцирования по координате x^α (приложение, п. 4-5).

2) Связность. Аффинная связность зависит не только от метрического тензора, но и от тензора конторсии, который произволен во всём, кроме антисимметрии по любой паре индексов и мнимости всех компонент. Обозначим мнимую часть полностью антисимметричного тензора конторсии через $A^{\alpha}_{\cdot\mu\nu}$, тогда выражение для связности (2) примет вид:

$$\Delta^{\alpha}_{\mu\nu} = \Gamma^{\alpha}_{\mu\nu} + i A^{\alpha}_{\cdot\mu\nu} \tag{9}$$

где $A_{\alpha\mu\nu} = -A_{\mu\alpha\nu} = -A_{\alpha\nu\mu} = -A_{\nu\mu\alpha} = A_{[\alpha\mu\nu]}$. Символы Кристоффеля определяются выражением:

$$\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\alpha\sigma} \left(\partial_\mu g_{\nu\sigma} + \partial_\nu g_{\mu\sigma} - \partial_\sigma g_{\mu\nu} \right) \tag{10}$$

Вследствие полной антисимметрии мнимая часть тензора конторсии $A^{\alpha}_{\cdot\mu\nu}$ имеет всего четыре независимые компоненты и может быть представлена в виде:

$$A_{\alpha\mu\nu} = -\varepsilon_{\alpha\mu\nu\sigma} \mathcal{A}^{\sigma} \tag{11}$$

где $\mathcal{A}^{\mu}$ – дуальный вектор мнимой части конторсии, а $\varepsilon_{\alpha\beta\mu\nu}$ – тензор Леви Чивиты. Дуальный вектор $\mathcal{A}^{\mu}$ определяется следующим образом:

$$\mathcal{A}^{\mu} = -\frac{1}{6} \varepsilon^{\mu\alpha\beta\gamma} A_{\alpha\beta\gamma} \tag{12}$$

Этот вектор можно использовать для геометрической интерпретации электромагнитного поля, отождествив его с точностью до размерного множителя с электромагнитным векторным потенциалом a^{μ}:

$$a^{\mu} = \hat{q} \mathcal{A}^{\mu} \tag{13}$$

где $\hat{q}$ – новая константа с размерностью электрического заряда. Соотношение (13) выражает геометрический смысл электромагнитного потенциала. Константа $\hat{q}$ должна быть достаточно большой для того, что бы обеспечить малость поправок, связанных с тензором конторсии ($A^{\alpha}_{\cdot\mu\nu} \sim \mathcal{A}^{\mu} \sim 1/\hat{q}$).

Тензор кручения с учётом выражения (9) будет равен:

$$\Omega^{\alpha}_{\cdot\mu\nu} = 2\Delta^{\alpha}_{[\mu\nu]} = 2 i A^{\alpha}_{\cdot\mu\nu} \tag{14}$$

Вследствие полной антисимметрии любые свёртки тензора кручения или тензора конторсии равны нулю. Полная антисимметрия тензора конторсии приводит также к тому, что ковариантная дивергенция любого векторного поля или симметричного тензора второго ранга в пространстве с общей связностью $\Delta^{\alpha}_{\mu\nu}$ совпадает с ковариантной дивергенцией римановой геометрии, вычисляемой для связности $\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}$ (приложение, п. 6).

3) Кривизна. Тензор кривизны Римана для несимметричной связности $\Delta^{\alpha}_{\mu\nu}$ определяется выражением (приложение, п. 7):

(15) $$R^{\alpha}_{\cdot\mu\beta\nu} = \partial_{\beta}\Delta^{\alpha}_{\mu\nu} - \partial_{\nu}\Delta^{\alpha}_{\mu\beta} + \Delta^{\alpha}_{\tau\beta}\Delta^{\tau}_{\mu\nu} - \Delta^{\alpha}_{\tau\nu}\Delta^{\tau}_{\mu\beta}$$

Тензор кривизны Риччи находится как свёртка тензора Римана $R^{\sigma}_{\cdot\mu\sigma\nu}$:

(16) $$R_{\mu\nu} = \partial_{\sigma}\Delta^{\sigma}_{\mu\nu} - \partial_{\nu}\Delta^{\sigma}_{\mu\sigma} + \Delta^{\sigma}_{\tau\sigma}\Delta^{\tau}_{\mu\nu} - \Delta^{\sigma}_{\tau\nu}\Delta^{\tau}_{\mu\sigma}$$

С учётом выражения (9) тензор кривизны Риччи можно представить в следующем виде (приложение, п. 8):

(17) $$R_{\mu\nu} = \tilde{R}_{\mu\nu} + \hat{R}_{\mu\nu}$$

(18) $$\tilde{R}_{\mu\nu} = \partial_{\sigma}\Gamma^{\sigma}_{\mu\nu} - \partial_{\nu}\Gamma^{\sigma}_{\mu\sigma} + \Gamma^{\sigma}_{\tau\sigma}\Gamma^{\tau}_{\mu\nu} - \Gamma^{\sigma}_{\tau\nu}\Gamma^{\tau}_{\mu\sigma}$$

(19) $$\hat{R}_{\mu\nu} = i\tilde{\nabla}_{\sigma}A^{\sigma}_{\cdot\mu\nu} - A^{\tau}_{\cdot\sigma\mu}A^{\sigma}_{\cdot\tau\nu}$$

Здесь $\tilde{R}_{\mu\nu}$ – тензор Риччи при отсутствии кручения; $\hat{R}_{\mu\nu}$ – поправка к тензору Риччи, связанная с кручением континуума (торсионная поправка). Символ $\tilde{\nabla}_{\alpha}$ обозначает симметричную ковариантную производную (для связности $\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}$). Используя соотношение (11) можно показать, что

(20) $$A^{\tau}_{\cdot\sigma\mu}A^{\sigma}_{\cdot\tau\nu} = -2\left(\mathcal{A}_{\mu}\mathcal{A}_{\nu} - g_{\mu\nu}\mathcal{A}^{\alpha}\mathcal{A}_{\alpha}\right)$$

Согласно выражениям (17), (18), (19) и (20) тензор кривизны Риччи разбивается на симметричную и антисимметричную части, которые имеют вид:

(21) $$R_{(\mu\nu)} = \tilde{R}_{\mu\nu} + 2\left(\mathcal{A}_{\mu}\mathcal{A}_{\nu} - g_{\mu\nu}\mathcal{A}^{\alpha}\mathcal{A}_{\alpha}\right)$$

(22) $$R_{[\mu\nu]} = i\tilde{\nabla}_{\sigma}A^{\sigma}_{\cdot\mu\nu}$$

Как видно из выражений (21) и (22), симметричная часть тензора Риччи полностью действительная, в то время как антисимметричная его часть полностью мнимая. Обозначим мнимую часть тензора Риччи как $F_{\mu\nu}$, тогда тензор Риччи можно записать следующим образом:

(23) $$R_{\mu\nu} = R_{(\mu\nu)} + iF_{\mu\nu}$$

(24) $$F_{\mu\nu} = \tilde{\nabla}_{\sigma}A^{\sigma}_{\cdot\mu\nu}$$

Так как тензор $F_{\mu\nu}$ антисимметричен, то существует соответствующий ему дуальный тензор $\mathcal{F}_{\mu\nu}$:

(25) $$\mathcal{F}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}F^{\alpha\beta}$$

При помощи выражений (24) и (11), а так же соответствующих преобразований находим, что дуальный тензор мнимой части кривизны Риччи (25) равен:

(26) $$\mathcal{F}_{\mu\nu} = \partial_\mu \mathcal{A}_\nu - \partial_\nu \mathcal{A}_\mu$$

Отсюда вытекает геометрическая интерпретация напряжённости электромагнитного поля. Согласно выражениям (13) и (26) тензор напряжённости электромагнитного поля $f_{\mu\nu}$ с точностью до размерного множителя совпадает с дуальным тензором мнимой части кривизны Риччи:

(27) $$f_{\mu\nu} = \partial_\mu a_\nu - \partial_\nu a_\mu = \hat{q}\mathcal{F}_{\mu\nu}$$

Скалярная кривизна зависит только от симметричной части тензора Риччи (21) и определяется выражением:

(28) $$R = g^{\mu\nu}R_{(\mu\nu)} = \tilde{R} - 6\,\mathcal{A}^\alpha \mathcal{A}_\alpha$$

где $\tilde{R} = \tilde{R}^{\mu}_{\cdot\mu}$ – скалярная кривизна при отсутствии кручения.

Таким образом, предлагаемая теория позволяет получить электромагнитное поле из геометрии, обеспечивая идеальное математическое соответствие между геометрическими величинами и характеристиками электромагнитного поля. При этом электромагнитный потенциал соответствует тензору конторсии (или тензору кручения), а напряжённость электромагнитного поля – антисимметричной части тензора кривизны Риччи. Дуальный вектор мнимой части конторсии $\mathcal{A}^\mu$ и дуальный тензор мнимой части кривизны Риччи $\mathcal{F}_{\mu\nu}$ выступают в качестве геометрических эквивалентов векторного потенциала a^μ и тензора напряжённости $f_{\mu\nu}$, характеризующих электромагнитное поле.

4. Единый геометрический лагранжиан

Законы, которым подчиняется геометрия пустого пространственно-временного континуума, могут быть получены при помощи вариационного принципа, согласно которому:

(29) $$\delta\int L_G\sqrt{-g}\,d^4x = 0$$

где L_G – единый геометрический лагранжиан. Любое вещество, заполняющее собой пространственно-временной континуум, будет влиять на его геометрию, вызывая отклонения от условия (29). Лагранжиан L_G, как и в теории Эйнштейна, может быть составлен из компонент тензора кривизны Риччи.

При помощи перестановочных δ-тензоров (приложение, п. 9-10) можно образовать четыре скалярные степени тензора Риччи:

$$\mathbf{Rc}^{(1)} \equiv \delta^{\alpha}_{\mu} R^{\mu}_{\cdot\alpha} \tag{30.1}$$

$$\mathbf{Rc}^{(2)} \equiv \delta^{\alpha\beta}_{\cdot\cdot\mu\nu} R^{\mu\nu} R_{\alpha\beta} \tag{30.2}$$

$$\mathbf{Rc}^{(3)} \equiv \delta^{\alpha\beta\gamma}_{\cdot\cdot\cdot\mu\nu\sigma} R^{\mu}_{\cdot\alpha} R^{\nu}_{\cdot\beta} R^{\sigma}_{\cdot\gamma} \tag{30.3}$$

$$\mathbf{Rc}^{(4)} \equiv \delta^{\alpha\beta\gamma\lambda}_{\cdot\cdot\cdot\cdot\mu\nu\sigma\tau} R^{\mu\nu} R_{\alpha\beta} R^{\sigma\tau} R_{\gamma\lambda} \tag{30.4}$$

При образовании нечётных степеней тензора Риччи его индексы сворачиваются по отдельности, в то время, как при образовании чётных степеней тензорные индексы сворачиваются парами. Из всех четырёх скалярных степеней тензора Риччи (30) практический интерес представляют только первые две. Первая скалярная степень $\mathbf{Rc}^{(1)}$ согласно (30.1) совпадает со скалярной кривизной R. Учитывая выражения (28) и (13) получаем:

$$\mathbf{Rc}^{(1)} = R = \tilde{R} - 6\,\mathcal{A}^{\alpha}\mathcal{A}_{\alpha} = \tilde{R} - \frac{6}{\hat{q}^2}\, a^{\alpha} a_{\alpha} \tag{31}$$

Вторая скалярная степень $\mathbf{Rc}^{(2)}$ (30.2) в силу антисимметрии тензора $\delta^{\alpha\beta}_{\cdot\cdot\mu\nu}$ по верхним и нижним индексам зависит только от антисимметричной части тензора Риччи, котарая согласно (22) и (24) связана с мнимой частью этого же тензора соотношением $R_{[\mu\nu]} = iF_{\mu\nu}$. Учитывая это соотношение, а также (25) и (27), приходим к выражению:

$$\mathbf{Rc}^{(2)} = -\delta^{\alpha\beta}_{\cdot\cdot\mu\nu} F^{\mu\nu} F_{\alpha\beta} = 2\mathcal{F}^{\alpha\beta}\mathcal{F}_{\alpha\beta} = \frac{2}{\hat{q}^2} f^{\alpha\beta} f_{\alpha\beta} \tag{32}$$

Из полученных выражений (31) и (32) видно, что скалярные степени тензора Риччи $\mathbf{Rc}^{(1)}$ и $\mathbf{Rc}^{(2)}$ содержат все необходимые слагаемые для составления физически адекватного полевого лагранжиана. В первую степень в качестве основного слагаемого входит скалярная кривизна континуума без кручения $\tilde{R}$, индуцирующая уравнения гравитации Эйнштейна, а вторая степень содержит свёртку $f^{\alpha\beta} f_{\alpha\beta}$, которая соответствует лагранжиану электромагнитного поля в общей теории относительности. Таким образом единый геометрический лагранжиан может быть составлен из первых двух скалярных степеней тензора Риччи $\mathbf{Rc}^{(1)}$ и $\mathbf{Rc}^{(2)}$, которые с учётом аномального расширения вселенной дополняются космологической постоянной.

Чтобы записать ларанжиан L_G наиболее простым и естественным способом воспользуемся положением C (§ 2). Согласно этому положению лагранжиан должен быть подобен скалярной функции $L^2(R)$, которая определяется выражением:

$$L^2 = (R - R_0)^2 = R^2 - 2R_0 R + R_0^2 \tag{33}$$

где R_0 – постоянная величина. Лагранжиан L_G получается из функции L^2 при замене алгебраических степеней скалярной кривизны на соответствующие скалярные степени тензора Риччи:

$$L_G = L^2(R^n \to \mathbf{Rc}^{(n)}) = \mathbf{Rc}^{(2)} - 2R_0\mathbf{Rc}^{(1)} + R_0^2 \tag{34}$$

Выражение (34) по своей структуре и природе содержащихся в нём величин подобно выражению (33). Постоянная величина R_0, входящая в лагранжиан L_G, играет роль фундаментальной геометрической константы, смысл которой станет понятен только после анализа уравнений поля. С учётом выражений (31) и (32) единый геометрический лагранжиан можно преобразовать к виду:

$$L_G = -\frac{1}{R_0\hat{q}^2} f^{\alpha\beta} f_{\alpha\beta} + \tilde{R} - \frac{6}{\hat{q}^2} a^{\alpha} a_{\alpha} - \frac{R_0}{2} \tag{35}$$

Сравнивая этот лагранжиан с полевым лагранжианом общей теории относительности, находим:

$$\hat{q} = \sqrt{\frac{8\pi}{\kappa R_0}} \tag{36}$$

$$\Lambda = \frac{R_0}{4} \tag{37}$$

где Λ – космологическая постоянная $\left(\Lambda \sim 10^{-56} см^{-2}\right)$, а κ – постоянная Эйнштейна. С учётом соотношения (36) выражение для лагранжиана L_G запишется в виде:

$$L_G = -\frac{\kappa}{8\pi}\left(f^{\alpha\beta} f_{\alpha\beta} + 6R_0 a^{\alpha} a_{\alpha}\right) + \tilde{R} - \frac{1}{2}R_0 \tag{38}$$

Этот лагранжиан отличается от старого лагранжиана только одним дополнительным слагаемым, которое содержит скалярный квадрат электромагнитного потенциала и множитель R_0. Однако, согласно соотношению (37), константа R_0 крайне мала и дополнительным слагаемым в лагранжиане (38) можно пренебречь.

5. Уравнения поля

Условие (29) в совокупности с (34) выражает основной геометрический принцип, определяющий геометрию пустого пространственно-временного континуума или, что эквивалентно, математическую структуру геометризированных силовых полей в отсутствие вещества. С учётом выражения (38) математическая формулировка вариационного принципа (29) принимает вид:

$$\delta\int\left[-\frac{\kappa}{8\pi}\left(f^{\alpha\beta} f_{\alpha\beta} + 6R_0 a^{\alpha} a_{\alpha}\right) + \tilde{R} - \frac{1}{2}R_0\right]\sqrt{-g}\, d^4x = 0 \tag{39}$$

где $\tilde{R} = g^{\mu\nu}\tilde{R}_{\mu\nu}$. Выполняя варьирование по переменным $g^{\mu\nu}$, $\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}$ и a^{α} (независимо) получаем уравнения поля в пустоте (и выражение (10)):

$$G_{\mu\nu} + \frac{1}{4}R_0 g_{\mu\nu} = \kappa\hat{T}_{\mu\nu} \tag{40}$$

$$\tilde{\nabla}_{\sigma} f^{\mu\sigma} + 3R_0 a^{\mu} = 0 \tag{41}$$

где приняты следующие обозначения:

$$G_{\mu\nu} \equiv \tilde{R}_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu}\tilde{R} \tag{42}$$

$$\hat{T}_{\mu\nu} \equiv \frac{1}{4\pi}\left(f^{\alpha}_{\cdot\mu} f_{\alpha\nu} - \frac{1}{4} g_{\mu\nu} f^{\alpha\beta} f_{\alpha\beta} \right) + \frac{3R_0}{4\pi}\left(a_{\mu}a_{\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} a^{\alpha} a_{\alpha} \right) \tag{43}$$

$G_{\mu\nu}$ – тензор Эйнштейна, $\hat{T}_{\mu\nu}$ – обобщённый тензор энергии-импульса электромагнитного поля. Уравнения (40) и (41), сформулированные в рамках чисто геометрической теории, представляют собой совместную систему уравнений поля для гравитационного и электромагнитного полей в свободном от вещества пространстве. Согласно полученным уравнениям в результате предпринятого геометрического обобщения теории гравитации изменились только уравнения электродинамики (41) и тензор энергии-импульса электромагнитного поля (43), а уравнения гравитации остались без изменений (40) и совпадают с уравнениями Эйнштейна, содержащими космологический член. Уравнения электромагнитного поля (41) по-прежнему линейны, но они уже не инвариантны относительно калибровочных преобразований.

Таким образом, все изменения, которые претерпели уравнения поля, затрагивают только электромагнетизм и связаны с геометризацией электромагнитного поля. При этом уравнения поля изменились очень слабо. В силу малости множителя R_0 все новые слагаемые в уравнениях поля (40) и (41) играют роль малых поправок, которые практически не влияют на математический характер рассматриваемых полей независимо от величины электромагнитного поля. Уравнения (41) устанавливают строгую взаимосвязь между существованием потенциала a^{μ} и напряжённости $f_{\mu\nu}$ электромагнитного поля. В результате новые слагаемые, содержащие зависимость от a^{μ}, будут существовать только вместе с основными слагаемыми, содержащими $f_{\mu\nu}$, как пренебрежимо малые поправки к этим слагаемым.

Рассмотрим тензор $\hat{T}_{\mu\nu}$ (43), который входит в уравнения гравитации (40) как тензор энергии-импульса электромагнитного поля. Ковариантная дивергенция этого тензора равна:

$$\nabla_{\mu}\hat{T}^{\mu\nu} = \tilde{\nabla}_{\mu}\hat{T}^{\mu\nu} = -\frac{1}{4\pi} f^{\nu}_{\cdot\mu}\left(\tilde{\nabla}_{\sigma} f^{\mu\sigma} + 3R_0 a^{\mu}\right) + \frac{3R_0}{4\pi} a^{\nu}\tilde{\nabla}_{\mu} a^{\mu} \tag{44}$$

Согласно уравнениям (41) выражение в скобках в пустом пространстве равно нулю. Подействовав на уравнения (41) ковариантной дивергенцией находим, что $\tilde{\nabla}_{\mu} a^{\mu} = 0$.

Таким образом тензор $\hat{T}_{\mu\nu}$ для свободного электромагнитного поля подчиняется законам сохранения, как полноценный тензор энергии-импульса:

(45) $$\nabla_{\mu}\hat{T}^{\mu\nu} = \tilde{\nabla}_{\mu}\hat{T}^{\mu\nu} = 0$$

В результате выполнения законов сохранения (45) уравнения поля (40) содержат свёрнутые тождества Бианки из римановой геометрии, обеспечивающие их совместность.

Уравнения поля в пустоте позволяют определить геометрический смысл константы R_0. Сворачивая уравнения гравитации (40) получаем:

(46) $$-\tilde{R} + R_0 = -\frac{3\kappa R_0}{4\pi}\, a^{\alpha} a_{\alpha} = -6\mathcal{A}^{\alpha}\mathcal{A}_{\alpha}$$

Откуда с учётом (28) находим, что

(47) $$R_0 = \tilde{R} - 6\mathcal{A}^{\alpha}\mathcal{A}_{\alpha} = R$$

Таким образом, константа R_0 имеет смысл скалярной кривизны пустого континуума. При наличии вещества уравнения (40) и соотношение (47) нарушаются.

Уравнения поля (40) и (41) справедливы только в пустом пространстве, в котором нет ничего, кроме геометрических свойств самого континуума (метрика и кручение), отвечающих за классические взаимодействия. Чтобы учесть влияние вещества, нужно ввести в правую часть уравнений источник поля, связанный с веществом. В результате получим уравнения поля в веществе:

(48) $$G_{\mu\nu} + \frac{1}{4}R_0 g_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu}$$

(49) $$\tilde{\nabla}_{\sigma} f^{\mu\sigma} + 3R_0 a^{\mu} = \xi\, j^{\mu}$$

где $T_{\mu\nu} = \hat{T}_{\mu\nu} + \tilde{T}_{\mu\nu}$, $\tilde{T}_{\mu\nu}$ – тензор энергии-импульса вещества, $T_{\mu\nu}$ – полный тензор энергии-импульса, j^{μ} – вектор плотности тока, ξ – константа ($\xi = 4\pi / c$).

Для количественных характеристик вещества справедливы уравнения непрерывности, которые выражают сохранение массы и заряда в системе покоя:

(50) $$\nabla_{\mu}\pi^{\mu} = \tilde{\nabla}_{\mu}\pi^{\mu} = 0$$

(51) $$\nabla_{\mu} j^{\mu} = \tilde{\nabla}_{\mu} j^{\mu} = 0$$

где $\pi^{\mu} = \mu u^{\mu}$ (плотность потока массы), $j^{\mu} = \rho u^{\mu}$ (плотность потока заряда), μ – плотность массы вещества, ρ – плотность заряда вещества, u^{μ} – вектор скорости движения вещества $\left(dx^{\mu}/d\tau\right)$. Величины μ и ρ определяются в системе покоя вещества, причём плотность массы включает только массу покоя частиц вещества. В зависимости от сложности физической системы и протекающих в ней процессов величины μ, ρ и u^{μ} могут относиться как к веществу в целом, так и к отдельным его компонентам.

Рассмотрим теперь некоторые важные следствия уравнений поля в веществе и уравнений непрерывности. Подействовав на уравнения (49) ковариантной дивергенцией и учитывая закон сохранения заряда (51) получаем общековариантное условие Лоренца для электромагнитного потенциала:

$$\nabla_\mu a^\mu = \tilde{\nabla}_\mu a^\mu = 0 \tag{52}$$

Это условие уже не является произвольным калибровочным условием и выполняется автоматически. Это связано с калибровочной неинвариантностью уравнений электромагнитного поля (49), которые определяют компоненты векторного потенциала a^μ однозначно.

Подействовав ковариантной дивергенцией на уравнения (48) получаем закон сохранения для полного тензора энергии-импульса:

$$\nabla_\mu T^{\mu\nu} = \tilde{\nabla}_\mu T^{\mu\nu} = 0 \tag{53}$$

Согласно этому закону изменение компонент тензора энергии-импульса вещества описывается уравнениями:

$$\tilde{\nabla}_\mu \tilde{T}^{\mu\nu} = -\tilde{\nabla}_\mu \hat{T}^{\mu\nu} \tag{54}$$

С учётом выражения (44) и уравнений (49) и (52) закон изменения компонент $\tilde{T}^{\mu\nu}$ (54) запишется в виде:

$$\tilde{\nabla}_\mu \tilde{T}^{\mu\nu} = \frac{1}{c} f^{\nu}_{\cdot\mu} j^\mu \tag{55}$$

Уравнения (55) выступают в качестве уравнений движения вещества и ничем не отличаются от прежних уравнений.

Так как уравнения движения вещества не изменились, то и уравнения движения отдельной частицы тоже не изменятся. Тензор энергии-импульса для сплошной среды, состоящей из неподвижных невзаимодействующих частиц, равен $\tilde{T}_{\mu\nu} = \mu u_\mu u_\nu = \pi_\mu u_\nu$, где μ – плотность массы покоя частиц среды, а u_μ – скорость движения частиц движущейся среды. Уравнения движения вещества (55) для этой воображаемой среды с учётом закона сохранения массы покоя (50) принимают вид:

$$\pi^\mu \tilde{\nabla}_\mu u^\nu = \frac{1}{c} f^{\nu}_{\cdot\mu} j^\mu \tag{56}$$

Если среда содержит только одну частицу, то распределение заряда и массы можно представить при помощи δ-функции. В этом случае $\pi^\mu = \mu u^\mu = m\delta(x - x_0)u^\mu$ и $j^\mu = \rho u^\mu = q\delta(x - x_0)u^\mu$, где m и q – масса и заряд частицы в системе покоя. В результате из уравнений (56) с учётом того, что $u^\beta \tilde{\nabla}_\beta u^\nu = du^\nu / d\tau + \Gamma^\nu_{\alpha\beta} u^\alpha u^\beta$, получаем:

$$\frac{du^\nu}{d\tau} + \Gamma^\nu_{\alpha\beta} u^\alpha u^\beta = \frac{q}{mc} f^{\nu}_{\cdot\beta} u^\beta \tag{57}$$

Это уравнения движения отдельной частицы. Очевидно, что уравнения (57) ничем не отличаются от прежних уравнений движения. Выражение в правой части полностью совпадает с известным выражением для силы Лоренца, вызывающей отклонение мировых линий заряженных частиц от геодезических.

Таким образом, уравнения движения сплошной среды (вещества) и отдельной частицы в предлагаемой единой геометрической теории остаются прежними, не смотря на то, что определяются другими уравнениями поля.

6. Новые эффекты

Сформулированная выше теория очень хорошо согласуется с существующими представлениями о классических взаимодействиях. Все принципиально новые эффекты предложенной здесь единой теории поля очень слабы и относятся только к закономерностям электромагнитного поля. Уравнения гравитационного поля (48) и уравнения движения (55) или (57) совпадают с общепринятыми уравнениями, в результате чего обеспечивается точное выполнение всех известных закономерностей гравитационного поля и движения корпускулярной материи. Отличаются от общепринятых уравнений только уравнения электромагнитного поля (49), которым соответствует новый тензор энергии-импульса (43). Однако, вследствие малости множителя R_0 все новые эффекты, связанные с уравнениями (49), будут пренебрежимо малы. Уравнения (49) обеспечивают почти точное выполнение обычных общековариантных уравнений Максвелла независимо от величины электромагнитного поля. Тем не менее, обобщение уравнений электродинамики к виду (49) приводит к выводам, имеющим принципиальное значение.

В пустом пространственно-временном континууме с псевдоевклидовой метрикой $\left(g_{00} = -1,\ g_{11} = g_{22} = g_{33} = 1 \right)$ уравнения электромагнитного поля (49) имеют вид:

(58) $$\partial^2 a^\mu - 3R_0 a^\mu = 0$$

где $\partial^2 = \Delta - c^{-2}\partial_t^2$ (оператор Д'Аламбера). Эти уравнения должны быть справедливы в любой достаточно малой области пространственно-временного континуума, в пределах которой метрика континуума очень близка к псевдоевклидовой.

Уравнения (58) допускают волновые решения, характерные для плоских волн. В декартовых координатах эти решения можно записать в следующем виде:

(59) $$a^\mu = a_0^\mu \sin(kx - \omega t)$$

где x – декартова координата вдоль направления распространения плоских волн. При этом циклическая частота ω и волновое число k связаны соотношением:

(60) $$\omega^2 = c^2\left(k^2 + 3R_0\right)$$

где c – предельная скорость движения материальных тел и распространения взаимодействий. Согласно соотношению (60) фазовая скорость электромагнитных волн немного превышает предельную скорость распространения взаимодействий, в то время как групповая скорость, совпадающая со скоростью переноса электромагнитной энергии, не достигает предельного значения:

(61) $$v_{\phi} = \frac{\omega}{k} = c\sqrt{1+\frac{3R_0}{k^2}} > c$$

(62) $$v_{г} = \frac{d\omega}{dk} = c\sqrt{1-3R_0\frac{c^2}{\omega^2}} < c$$

Таким образом, в электродинамике, основанной на уравнениях (58), скорость распространения электромагнитного излучения всегда будет меньше предельной скорости c (62). Как видно из формул (61) и (62) фазовая и групповая скорости зависят от частоты колебаний в источнике (или от длины волны). Для обычных частот обе скорости практически неотличимы от предельной скорости c. Отклонение от значения c становится существенным только для крайне низких частот, но электромагнитные волны со столь низкими частотами слишком трудно зарегистрировать.

В статическом сферически-симметричном случае решения уравнений (58) описывают поле точечного заряда. Согласно уравнениям (58) электростатический потенциал этого поля в полярных координатах определяется выражением:

(64) $$\varphi = \frac{q}{r}e^{-\alpha r}$$

где $\varphi = a^0$ (электростатический потенциал), q – электрический заряд, $\alpha = \sqrt{3R_0} = m_\gamma c/\hbar$, а r – радиальная координата относительно точечного заряда. Из-за малости константы α потенциал (64) с «обрезающим» экспоненциальным множителем практически неотличим от кулоновского.

С точки зрения квантовой теории, новое слагаемое в уравнениях электромагнитного поля (58) интерпретируется как массовый член, а все результаты, полученные при решении этих уравнений, соответствуют наличию у фотона ненулевой массы покоя m_γ:

(63) $$m_\gamma = \frac{\hbar\sqrt{3R_0}}{c}$$

При этом скорость движения фотонов совпадает с групповой скоростью (62). Согласно выражению (63) масса покоя фотона связана с собственной кривизной пустого континуума. Масса фотона (63) ничтожно мала и при экспериментальной проверке может быть неотличима от нулевой.

При помощи соотношения (37) можно оценить величину констант, отвечающих за новые эффекты:

(64) $$3R_0 \sim 10^{-55}\ см^{-2}$$

(65) $$m_\gamma \sim 10^{-65}\ г$$

Предсказываемое теорией значение массы фотона позволяет оценить пригодность данной теории с точки зрения эксперимента. Существующие экспериментальные и наблюдательные данные накладывают на массу покоя фотона следующее ограничение:

$$m_\gamma < 3 \cdot 10^{-60}\, г \tag{66}$$

Теоретическое значение массы фотона (65) удовлетворяет этому условию. Это означает, что данная теория вполне приемлема с экспериментальной точки зрения, но для её подтверждения нужна тщательная экспериментальная проверка, позволяющая определить экспериментальное значение массы фотона более точно.

7. Заключение

Сформулированная теория классических полей позволяет объяснить электромагнитные явления с геометрической точки зрения, при этом гравитация и электромагнетизм рассматриваются в рамках единой геометрической теории. При построении теории использовался наиболее простой и естественный подход, реализующий геометрическое единство гравитации и электромагнетизма. В основу теории положена геометрия Римана-Картана с мнимым и полностью антисимметричным тензором конторсии (или кручения). При этом у тензора Риччи появляется мнимая антисимметричная часть.

Согласно предложенной теории гравитационное взаимодействие связано с метрикой, а электромагнитное – с конторсией (или кручением), то есть разные взаимодействия связаны с разными геометрическими характеристиками пространственно-временного континуума. Геометрическая природа электромагнитного взаимодействия выражается в геометрической интерпретации основных характеристик электромагнитного поля. Электромагнитный векторный потенциал интерпретируется как дуальный вектор мнимой части конторсии, а тензор напряжённости электромагнитного поля – как дуальный тензор мнимой части кривизны Риччи. При этом обеспечивается идеальное математическое соответствие между геометрическими величинами и характеристиками электромагнитного поля.

В результате применения независимых геометрических характеристик (метрики и конторсии) при описании двух разных взаимодействий последние сохраняют свою индивидуальность, что позволяет учесть особенности каждого взаимодействия. Уравнения поля, определяющие закономерности гравитационного и электромагнитного полей в пустом пространстве, удаётся получить из полностью геометрического вариационного принципа. Чтобы учесть влияние вещества в правую часть этих уравнений вводится источник поля, связанный с веществом (тензор энергии-импульса вещества или вектор плотности тока). Новые уравнения поля отличаются от общепринятых уравнений теории гравитации и электродинамики несущественно, причём обобщаются только уравнения электродинамики и тензор энергии-импульса электромагнитного поля. Возникающие в уравнениях поля новые слагаемые играют роль малых поправок независимо от величины полей. Поправка, содержащаяся в обобщённых уравнениях электромагнитного поля, приводит к нарушению калибровочной инвариантности и автоматическому выполнению общековариантного условия Лоренца. Все законы сохранения, а так же законы движения вещества и частиц, формулируются точно так же, как и в общей теории относительности Эйнштейна (то есть при отсутствии кручения).

С точки зрения квантовой теории все новые эффекты, соответствующие обобщённым уравнениям электромагнитного поля, интерпретируются как проявления массивности фотонов. При этом масса покоя фотона связана со скалярной кривизной пустого континуума, выполняющей также функции космологической постоянной. Предсказываемая теорией величина массы фотона находится в согласии с известными экспериментальными ограничениями.

В заключение отметим, что предложенная теория не апеллирует к искусственным геометрическим гипотезам, свободна от внутренних теоретических проблем и очень хорошо согласуется с известными физическими законами.

Приложение

1. Аффинная связность в геометрии Римана-Картана:

$$\Delta^{\alpha}_{\mu\nu} = \Gamma^{\alpha}_{\mu\nu} + K^{\alpha}_{\cdot\mu\nu}$$

$$\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\alpha\sigma}\left(\partial_{\mu} g_{\nu\sigma} + \partial_{\nu} g_{\mu\sigma} - \partial_{\sigma} g_{\mu\nu}\right)$$

$$K_{\alpha\mu\nu} = -K_{\mu\alpha\nu}$$

2. Свёртка символов Кристоффеля:

$$\Gamma^{\sigma}_{\mu\sigma} = \frac{\partial_{\mu} g}{2g}, \text{ где } \quad g = \det\left\| g_{\mu\nu} \right\|$$

3. Взаимосвязь между тензором кручения и тензором конторсии:

$$\Omega_{\alpha\mu\nu} = \Delta_{\alpha\mu\nu} - \Delta_{\alpha\nu\mu} = K_{\alpha\mu\nu} - K_{\alpha\nu\mu}$$

$$K_{\alpha\mu\nu} = \frac{1}{2}\left(\Omega_{\alpha\mu\nu} - \Omega_{\mu\alpha\nu} - \Omega_{\nu\alpha\mu}\right)$$

4. Изменение компонент вектора при параллельном переносе:

$$\delta u^{\mu} = -\Delta^{\mu}_{\alpha\beta} u^{\alpha} dx^{\beta}, \quad \delta u_{\mu} = \Delta^{\alpha}_{\mu\beta} u_{\alpha} dx^{\beta}$$

5. Ковариантное дифференцирование:

$$\nabla_{\mu} u^{\nu} = \partial_{\mu} u^{\nu} + \Delta^{\nu}_{\sigma\mu} u^{\sigma}, \quad \tilde{\nabla}_{\mu} u^{\nu} = \partial_{\mu} u^{\nu} + \Gamma^{\nu}_{\sigma\mu} u^{\sigma}$$

$$\nabla_{\mu} u_{\nu} = \partial_{\mu} u_{\nu} - \Delta^{\sigma}_{\nu\mu} u_{\sigma}, \quad \tilde{\nabla}_{\mu} u_{\nu} = \partial_{\mu} u_{\nu} - \Gamma^{\sigma}_{\nu\mu} u_{\sigma}$$

6. Ковариантная дивергенция для связности $\Delta^{\alpha}_{\mu\nu} = \Gamma^{\alpha}_{\mu\nu} + iA^{\alpha}_{\cdot\mu\nu}$:

$$A^{\alpha}_{\cdot\mu\alpha} = A^{\alpha}_{\cdot(\mu\nu)} = 0, \quad \Delta^{\alpha}_{\mu\alpha} = \Gamma^{\alpha}_{\mu\alpha}, \quad \Delta^{\alpha}_{(\mu\nu)} = \Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}$$

$$\nabla_{\mu} u^{\mu} = \partial_{\mu} u^{\mu} + \Delta^{\mu}_{\sigma\mu} u^{\sigma} = \partial_{\mu} u^{\mu} + \Gamma^{\mu}_{\sigma\mu} u^{\sigma}$$

$$\nabla_{\mu} T^{(\mu\nu)} = \partial_{\mu} T^{(\mu\nu)} + \Delta^{\mu}_{\sigma\mu} T^{(\sigma\nu)} + \Delta^{\nu}_{(\sigma\mu)} T^{(\mu\sigma)} = \partial_{\mu} T^{\mu\nu} + \Gamma^{\mu}_{\sigma\mu} T^{(\sigma\nu)} + \Gamma^{\nu}_{\sigma\mu} T^{(\mu\sigma)}$$

7. Тензор кривизны Римана и тензор кручения:

$$\left(\nabla_{\mu}\nabla_{\nu} - \nabla_{\nu}\nabla_{\mu}\right) u^{\lambda} = R^{\lambda}_{\cdot\sigma\mu\nu} u^{\sigma} + \Omega^{\sigma}_{\cdot\mu\nu} \nabla_{\sigma} u^{\lambda}$$

$$R^{\alpha}_{\cdot\beta\mu\nu} = \partial_{\mu}\Delta^{\alpha}_{\beta\nu} - \partial_{\nu}\Delta^{\alpha}_{\beta\mu} + \Delta^{\alpha}_{\tau\mu}\Delta^{\tau}_{\beta\nu} - \Delta^{\alpha}_{\tau\nu}\Delta^{\tau}_{\beta\mu}$$

$$\Omega^{\alpha}_{\cdot\mu\nu} = \Delta^{\alpha}_{\mu\nu} - \Delta^{\alpha}_{\nu\mu}$$

8. Разложение тензора кривизны Римана:

$$\begin{aligned} R^{\alpha}_{\cdot\beta\mu\nu} = {} & \partial_{\mu}\Gamma^{\alpha}_{\beta\nu} - \partial_{\nu}\Gamma^{\alpha}_{\beta\mu} + \Gamma^{\alpha}_{\tau\mu}\Gamma^{\tau}_{\beta\nu} - \Gamma^{\alpha}_{\tau\nu}\Gamma^{\tau}_{\beta\mu} + \\ & + \tilde{\nabla}_{\mu} K^{\alpha}_{\cdot\beta\nu} - \tilde{\nabla}_{\nu} K^{\alpha}_{\cdot\beta\mu} + K^{\alpha}_{\cdot\tau\mu} K^{\tau}_{\cdot\beta\nu} - K^{\alpha}_{\cdot\tau\nu} K^{\tau}_{\cdot\beta\mu} \end{aligned}$$

9. Тензор Леви Чивиты:

$$\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\lambda} = \sqrt{|g|}\,[\alpha\beta\gamma\lambda], \quad \varepsilon^{\alpha\beta\gamma\lambda} = -\frac{1}{\sqrt{|g|}}[\alpha\beta\gamma\lambda]$$

$$[\alpha\beta\gamma\lambda] = \begin{cases} +1, & \alpha\beta\gamma\lambda \text{ - чётная перестановка 0123} \\ -1, & \alpha\beta\gamma\lambda \text{ - нечётная перестановка 0123} \\ 0, & \alpha\beta\gamma\lambda \text{ содержит повторяющиеся значения} \end{cases}$$

10. Перестановочные δ-тензоры:

$$\delta^{\alpha\beta\gamma\lambda}_{\cdot\cdot\cdot\cdot\mu\nu\sigma\tau} \equiv -\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\lambda}\varepsilon_{\mu\nu\sigma\tau}$$

$$\delta^{\alpha\beta\gamma}_{\cdot\cdot\cdot\mu\nu\sigma} \equiv -\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\tau}\varepsilon_{\mu\nu\sigma\tau}$$

$$\delta^{\alpha\beta}_{\cdot\cdot\mu\nu} \equiv -\frac{1}{2}\varepsilon^{\alpha\beta\sigma\tau}\varepsilon_{\mu\nu\sigma\tau} = \delta^{\alpha}_{\mu}\delta^{\beta}_{\nu} - \delta^{\alpha}_{\nu}\delta^{\beta}_{\mu}$$

$$\delta^{\alpha}_{\cdot\mu} \equiv \delta^{\alpha}_{\mu} \equiv -\frac{1}{6}\varepsilon^{\alpha\nu\sigma\tau}\varepsilon_{\mu\nu\sigma\tau}$$

Литература

1. *Einstein A.,* The Meaning of Relativity, Princeton Univ. Press, Princeton, N.Y, 1950 (Перевод: *Эйнштейн А.,* Сущность теории относительности, ИЛ, М., 1955).
2. *А. Эйнштейн,* Собрание научных трудов, Т. 1-2, изд-во «Наука», М., 1966.
3. *E. Schrodinger,* Space-Time Structure, Cambridge University Press, 1960 (Перевод: Э. Шредингер, Пространственно-временная структура вселенной, ИО НФМИ, 2000).
4. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.,* Теория поля, изд-во «Наука», М., 1973.
5. *C. W. Misner, K. S. Thorne, and J. A. Wheeler,* Gravitation, Freeman, San Francisco, 1973 (Перевод: *Ч. Мизнер, К. Торн, Дж. Уилер,* Гравитация, изд-во «Мир», М., 1977).
6. *Б.А. Дубровин, С.П. Новиков, А.Т. Фоменко,* Современная геометрия: методы и приложения, изд-во «Наука», М., 1986.
7. *E. Cartan,* Lecons sur la Geometrie des Espaces de Riemann, Gauthier-Villars, Paris, 1928 and 1946 (Перевод: Картан Э., Риманова геометрия в ортогональном репере, изд-во МГУ, М., 1960).
8. *E. Cartan,* On Manifolds with an Affine Connection and the Theory of General Relativity, translated by A. Magnon and A. Ashtekar (Bibliopolis, Naples, 1986).
9. *Н.Н. Попов,* Новые представления о структуре пространства-времени и проблема геометризации материи, изд-во «Едиториал УРСС», 2002 г.
10. *Г.В. Чибисов,* Астрофизические верхние пределы на массу покоя фотона, УФН, Том 119. вып. 3, 1976.
11. *Alberto Saa,* Einstein-Cartan theory of gravity revisited, gr-qc/9309027 (1993).
12. *Hong-jun Xie and Takeshi Shirafuji,* Dynamical torsion and torsion potential, gr-qc/9603006 (1996).
13. *V.C. de Andrade and J.G. Pereira,* Torsion and the Electromagnetic Field, gr-qc/9708051 (1999).
14. *Yuyiu Lam,* Totally Asymmetric Torsion on Riemann-Cartan Manifold, gr-qc/0211009 (2002).