Министерство Образования Российской Федерации

Южно-Уральский Государственный Университет

Кафедра Системы Управления

**КУРСОВАЯ РАБОТА**

**по дисциплине: Исследование операций**

**Вариант 8**

Руководитель:

Плотникова Н.В.

«\_\_\_»\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_2004 г.

Автор проекта:

студентка группы

ПС – 317

Куликова Мария

«\_\_\_»\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_2004 г.

Проект защищен

с оценкой

«\_\_\_»\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_2004 г.

Челябинск

2004 г.**Содержание.**

Задача 1………………………………………………………………….3

Задача 2………………………………………………………………….8

Задача 3…………………………………………………………………10

Задача 4…………………………………………………………………13

**Задача 1 (№8)**

Условие:

На производстве четырёх видов кабеля выполняется пять групп технологических операций. Нормы затрат на 1 км. кабеля данного вида на каждой из групп операций, прибыль от реализации 1 км. каждого вида кабеля, а также общий фонд рабочего времени, в течение которого могут выполняться эти операции, указаны в таблице.

Определить такой план выпуска кабеля, при котором общая прибыль от реализации изготовляемой продукции является максимальной.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Технологическая операция | Нормы затрат времени на обработку 1 км кабеля вида | Общий фонд рабочего времени (ч) |
| 1 | 2 | 3 | 4 |
| Волочение | а11 | а12 | а13 | а14 | А1 |
| Наложение изоляций | а21 | а22 | а23 | а24 | А2 |
| Скручивание элементов в кабель | а31 | а32 | а33 | а34 | А3 |
| Освинцовывание | а41 | а42 | а43 | а44 | А4  |
| Испытание и контроль | а51 | а52 | а53 | а54 |  А5  |
| Прибыль от реализации 1 км кабеля | В1 | В2 | В3 | В4 |  |

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| №вар. | а11 | а12 | а13 | а14 | а21 | а22 | а23 | а24 | а31 | а32 | а33 | а34 | а41 |
| 1 | 1,5 | 1 | 2 | 1 | 1 | 2 | 0 | 2 | 4 | 5 | 5 | 4 | 2 |

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| № вар. | а42 | а43 | а44 | а51 | а52 | а53 | а54 | А1 | А2 |  А3  | А4  | 5 |
| 1 | 1 | 4 | 0 | 1 | 2 | 1,5 | 4 | 6500 | 4000 | 11000 | 4500 | 4500 |

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| В1 | В2 | В3 | В4 |
| 1 | 2 | 1,5 | 1 |

Решение:

Составляем математическую модель задачи:

пусть x1 –длина 1-ого кабеля (км);

 x2 – длина 2-ого кабеля (км);

 x3 – длина 3-ого кабеля (км);

 x4 – длина 4-ого кабеля (км)

тогда целевая функция L - общая прибыль от реализации изготовляемой продукции, будет иметь следующий вид

L= В1x1 + В2x2 + В3x3 + В4x4 = x1+ 2x2 + 1,5x3 + x4 → max

Получим систему ограничений:

1,5x1 + x2 + 2x3+ x4 ≤ 6500;

 x1 + 2x2 + 0x3+2x4 ≤ 4000;

 4x1 + 5x2 + 5x3+4x4 ≤11000;

 2x1 + x2 +1,5x3+0x4 ≤ 4500;

 x1 + 2x2 +1,5x3+4x4 ≤ 4500.

Приведём полученную математическую модель к виду ОЗЛП с помощью добавочных неотрицательных переменных, число которых равно числу неравенств:

1,5x1 + x2 + 2x3+ x4 + x5 = 6500;

 x1 + 2x2 + 0x3+2x4 + x6= 4000;

 4x1 + 5x2 + 5x3+4x4 + x7=11000;

 2x1 + x2 +1,5x3+0x4 + x8 =4500;

 x1 + 2x2 +1,5x3+4x4 + x9 =4500.

Итак, выберем x1, x2, x3, x4 - свободными переменными, а x5, x6, x7, x8, x9 - базисными переменными (каждая из них встречаются в системе лишь в одном уравнении с коэффициентом 1, а в остальных с нулевыми коэффициентами). Приведём систему к стандартному виду, выразив для этого все базисные переменные через свободные:

x5 = 6500 – (1,5x1 + x2 + 2x3+ x4 );

x6 = 4000 – ( x1 + 2x2 + 0x3+2x4);

x7 =11000 - ( 4x1 + 5x2 + 5x3+4x4);

x8 =4500 – ( 2x1 + x2 +1,5x3+0x4);

x9 =4500 – ( x1 + 2x2 +1,5x3+4x4)

L=0 –(- x1- 2x2 - 1,5x3 - x4)

Решим методом симплекс-таблиц:

Это решение опорное, т.к. все свободные члены положительны.

Выберем столбец в таблице, который будет разрешающим, пусть это будет x1, выберем в качестве разрешающего элемента тот, для которого отношение к нему свободного члена будет минимально (это x8).

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | A |  |  |  |  |
| L | 02250 | -10,5 | -2 0,5 | -1,52 | -10 |
|  | 6500-3375 | 1,5-0,75 | 1-0,75 | 2-3 | 10 |
|  | 4000-2250 | 1-0,5 | 2-0,5 | 0-2 | 30 |
|  | 11000-9000 | 4-2 | 5-2 | 5-8 | 40 |
|  x8 | 45002250 | 20,5 | 10,5 | 42 | 0 0 |
| x9  | 4500-2250 | 1-0,5 | 2-0,5 | 1,5-2 | 40 |

Меняем  и 

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | A | x8 |  |  |  |
| L | 22501000 | 0,5-1 | -1,50,5 | 0,5-1,5 | -12 |
|  | 3125-500/3 | -0,751/6 | 0,25-1/12  | -10,25 | 1-1/3 |
|  | 1750-1000 | -0,51  | 1,5-0,5 | -21,5 | 3-2 |
|  | 20002000/3 | -2-2/3  | 31/3  | -3-1 | 44/3 |
|  | 2250-1000/3 | 0,51/3 | 0,5-1/6 | 20,5 | 0-2/3 |
| x9  | 2250-1000 | -0,51 | 1,5-0,5 | -0,51,5 | 4-2 |

Меняем  и x9

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | A | x8 |  |  |  |
| L | 3250250 | -0,50,5 | 0,5-0,5 | -11 | 12 |
|  | 8875/3187,5 | -7/120,375 | -1/12-0,375 | -0,750,75 | 2/31,5 |
|  | 750125 | 0,50,25 | -0,5-0,25 | -0,50,5 | 11 |
|  | 2000/3250 | -2/30,5 | 1/3-0,5 | -11 | 4/32 |
|  | 5750/3-625 | 5/6-1,25 | -1/61,25 | 2,5-2,5 | -2/3-5 |
| x9 | 250250 | 0,50,5 | -0,5-0,5 | 11 | 22 |

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | A | x8 |  | x9 |  |
| L | 3500 | 0 | 0 | 1 | 3 |
|  | 18875/6 | -5/24 | -11/24 | 0,75 | 13/6 |
|  | 875 | 0,75 | -0,75 | 0,5 | 2 |
|  | 2750/3 | -1/6 | -1/6 | 1 | 10/3 |
|  | 3875/3 | -5/12 | 13/12 | -2,5 | -17/3 |
|  | 250 | 0,5 | -0,5 | 1 | 2 |

Видим, что коэффициенты при переменных в целевой функции положительны, значит, найденное решение будет оптимальным.

Итак, =0, =3875/3, =2750/3, =250, L=3500.

Ответ: если предприятие будет изготавливать только три вида проволоки 1,2,3 причем 3875/3 км, 2750/3 км, 250 км соответственно, то общая прибыль от реализации изготовляемой продукции будет максимальной и равной 3500(ед).

**Задача 2 (№28)**

Условие:

С помощью симплекс–таблиц найти решение задачи линейного программирования: определить экстремальное значение целевой функции Q=CTx при условии Ax ≥ ≤B,

где = 1 2 . . . 6 , В = b1 b2 . . . b6 ,

 = 1 2 . . . 6 , А= (=1,6; =1,3).

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| № вар. | с1 | с2 | с3 | с4 | с5 | с6 | b1 | b2 | b3 | Знаки ограничений | a11 | a12 | a13 | a14 |
|  1 |  2 | 3 |  |  |  |  |
|  28 | -6 | 0 |  |  -1 | -1 |  0 |  8 |  |  |  = |  = | = | 4 | 1 | 1 | 2 |

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| № вар. | a15 | a16 | a21 | a22 | a23 | a24 | a25 | a26 | a31 | a32 | a33 | a34 | a35 | a36 | Тип экстрем. |
| 1. 34
 | 1 | 0 | 2 | -1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | max |

Решение:

Получим систему:

4 x1 + x2 + x3+2x4 + x5 =8;

2x1 - x2 +x4=2;

x1 + x2+x5=3

L= -6x1+ x3 -x4 -x5 → max

Пусть x2, x4 – свободные переменные, а x1, x3, x5 - базисные переменные. Приведем систему и целевую функцию к стандартному виду, для построения симплекс-таблицы:

x5 =2-(1,5x2 -0,5 x4);

x3 =6-(1,5x2 +0,5 x4);

x1=1-(-0,5x2+0,5x4)

L=-2-(3x2- x4) → max

Составим симплекс-таблицу:

Выберем разрешающим столбцом x4,т.к. только перед этой переменной в целевой функции отрицательное число, выберем в качестве разрешающего элемента тот, для которого отношение к нему свободного члена будет минимально (это x1). Меняем x4 и x1

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | b | x2 | x4 |  |
| L | -22 | 3-1 | -12 |  |
| x1 | 12 | -0,5-1 | 0,52 | 1/0,5=2 |
|  | 6-1 | 1,50,5 | 0,5-1 | 6/0,5=12 |
|  | 21 | 1,5-0,5 | -0,51 |  |

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  | b | x2 | x1 |
| L | 0 | 2 | 2 |
| x4 | 2 | -1 | 2 |
|  | 5 | 2 | -1 |
|  | 3 | 1 | 1 |

Получили оптимальное решение, т.к. все коэффициенты положительны.

Итак, x1= x2=0, x3 =5, x4=2, x5 =3, L=0.

Ответ: x1= x2=0, x3 =5, x4=2, x5 =3, L=0.

**Задача 3 (№8)**

Условие:

Решение транспортной задачи:

1. Записать условия задачи в матричной форме.

2. Определить опорный план задачи.

3. Определить оптимальный план задачи.

4. Проверить решение задачи методом потенциалов.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| №вар. | а1 | а2 | а3 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | с11 | с12 | с13 |
| 8 | 200 | 200 | 600 | 200 | 300 | 200 | 100 | 200 | 25 | 21 | 20 |
| с14 | с15 | с21 | с22 | с23 | с24 | с25 | с31 | с32 | с33 | с34 | с35 |
| 50 | 18 | 15 | 30 | 32 | 25 | 40 | 23 | 40 | 10 | 12 | 21 |

Решение:

Составим таблицу транспортной задачи. Заполним таблицу методом северо-западного угла:

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | B1 | B2 | B3 | B4 | B5 | ai |
| A1 | 25200 | 21 | 20 | 50 | 18 | 200 |
| A2 | 15 | 30200 | 32 | 25 | 40 | 200 |
| A3 | 23 | 40100 | 10200 | 12100 | 21200 | 600 |
| bj | 200 | 300 | 200 | 100 | 200 | 1000 |

Количество заполненных ячеек r=m+n-1=6.

Проверим сумму по столбцам, сумму по строкам и количество базисных (заполненных) клеток:

r =6, ∑ ai=∑ bj=1000, всё выполняется, значит, найденный план является опорным.

L=25\*200+30\*200+40\*100+10\*200+12\*100+21\*200=22400

Постараемся улучшить план перевозок.

1. Рассмотрим цикл (1;1)-(1;2)-(2;2)-(2;1)

Подсчитаем цену цикла: j=15-30+21-25=-19<0

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | B1 | B2 | B3 | B4 | B5 | ai |
| A1 | 25 | 21200 | 20 | 50 | 18 | 200 |
| A2 | 15200 | 30 | 32 | 25 | 40 | 200 |
| A3 | 23 | 40100 | 10200 | 12100 | 21200 | 600 |
| bj | 200 | 300 | 200 | 100 | 200 | 1000 |

L=21\*200+15\*200+40\*100+10\*200+12\*100+21\*200=18600

1. Рассмотрим цикл (2;1)-(2;2)-(3;2)-(3;1)

j=-15+30+23-40=-2<0

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | B1 | B2 | B3 | B4 | B5 | ai |
| A1 | 25 | 21200 | 20 | 50 | 18 | 200 |
| A2 | 15100 | 30100 | 32 | 25 | 40 | 200 |
| A3 | 23100 | 40 | 10200 | 12100 | 21200 | 600 |
| bj | 200 | 300 | 200 | 100 | 200 | 1000 |

L=21\*200+15\*100+30\*100+23\*100+10\*200+12\*100+21\*200=18400

Проверим методом потенциалов:

Примем α1=0, тогда βj = cij – αi (для заполненных клеток).

Если решение верное, то во всех пустых клетках таблицы Δij = cij – (αi+ βj) ≥ 0

Очевидно, что Δij =0 для заполненных клеток.

В результате получим следующую таблицу:

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | B1=6 | B2=21 | B3=-7 | B4=-5 | B5=4 | ai |
| A1=0 | 25-6>0 | 21-21=0200 | 20+7>0 | 50+5>0 | 18-4>0 | 200 |
| A2=9 | 15-9-6=0100 | 30-21-9=0100 | 32-9+7>0 | 25+5-9>0 | 40-4-9>0 | 200 |
| A3=17 | 23-17-6=0100 | 40-21-17>0 | 10+7-17=0200 | 12+5-17=0100 | 21-4-17=0200 | 600 |
| bj | 200 | 300 | 200 | 100 | 200 | 1000 |

Таким образом, решение верное, т.к. Δij > 0 для всех пустых клеток и Δij =0 для всех заполненных.

Тогда сумма всех перевозок:

L=18400

Ответ:

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | B1 | B2 | B3 | B4 | B5 | ai |
| A1 | 25 | 21200 | 20 | 50 | 18 | 200 |
| A2 | 15100 | 30100 | 32 | 25 | 40 | 200 |
| A3 | 23100 | 40 | 10200 | 12100 | 21200 | 600 |
| bj | 200 | 300 | 200 | 100 | 200 | 1000 |

Задача 4 (№53)

Условие:

Определить экстремум целевой функции вида

 = 1112+2222+1212+11+22

при условиях:

111+122<=>1

211+222<=>2.

1. Найти стационарную точку целевой функции и исследовать ее (функцию) на выпуклость (вогнутость) в окрестностях стационарной точки.
2. Составить функцию Лагранжа.
3. Получить систему неравенств в соответствии с теоремой Куна-Таккера.
4. Используя метод искусственных переменных составить симплекс-таблицу и найти решение полученной задачи линейного программирования.
5. Дать ответ с учетом условий дополняющей нежесткости.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  № | b1 | b2 | c11 | c12 | c22 | extr | a11 | a12 | a21 | a22 | p1 | p2 | Знаки огр.1 2 |
| 53 | 6 | 1,5 | -2 | -4 | –1 | max | 2,5 | -1 | 3 | 2,5 | 7 | 13 | ≥ | ≥ |

Решение:

Целевая функция:

F= -212-22-412+61+1,52→max

Ограничения g1(x) и g2(x): 2,51-2≥7 2,51-2–7≥0

31+2,52≥13 31+2,52-13≥0

1) определим относительный максимум функции, для этого определим стационарную точку (х10, х20):

 →

2) Исследуем стационарную точку на максимум, для чего определяем выпуклость или вогнутость функции

F11 (х10, х20) = -4 < 0

F12 (х10, х20)=-4

F21 (х10, х20)=-4

F22 (х10, х20)=-2

F11 F12 -4 -4

F21 F22 -4 -2

Т.к. условие выполняется, то целевая функция является строго выпуклой в окрестности стационарной точки

3) Составляем функцию Лагранжа:

L(x,u)=F(x)+u1g1(x)+u2g2(x)=-212-22-412+61+1,52+u1 (2,51-2–7)+ u2 (31+2,52-13).

Получим уравнения седловой точки, применяя теорему Куна-Таккера:

 i=1;2

Объединим неравенства в систему А, а равенства в систему В:

Система А:

Система В:

Перепишем систему А:

6-41-42+2,5u1+3u2 <0

1,5-41-22-u1+2,5u2 <0

2,51-2–7≥0

31+2,52–13≥0

4)Введем новые переменные

V={v1,v2}≥0; W={w1,w2}≥0

в систему А для того, чтобы неравенства превратить в равенства:

6-41-42+2,5u1+3u2 + v1=0

1,5-41-22-u1+2,5u2 + v2=0

2,51-2–7- w1=0

31+2,52–13- w2=0

Тогда

- v1=6-41-42+2,5u1+3u2

- v2=1,5-41-22-u1+2,5u2

w1=2,51-2–7

w2=31+2,52–13

Следовательно, система В примет вид:

 - это условия дополняющей нежесткости.

5) Решим систему А с помощью метода искусственных переменных.

Введем переменные Y={y1; y2} в 1 и 2 уравнения системы

6-41-42+2,5u1+3u2 + v1 -y1=0

1,5-41-22-u1+2,5u2 + v2 -y2=0

2,51-2–7- w1=0

31+2,52–13- w2=0

и создадим псевдоцелевую функцию Y=My1+My2→min

Y’=-Y= -My1-My2→max.

В качестве свободных выберем х1, х2, v1, v2, u1, u2;

а в качестве базисных y1, y2, w1, w2.

Приведем систему и целевую функцию к стандартному виду, для построения симплекс-таблицы:

y1=6-(41+42-2,5u1-3u2 - v1)

y2=1,5-(41+22+u1-2,5u2 -v2)

w1=-7-(-2,51+2)

w2=-13-(-31-2,52)

Y’=-Y=-My1-My2=-7,5M-(-81-62+1,5u1+5,5u2+ v1+v2) M

Решим с помощью симплекс-таблицы. Найдем опорное решение:

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |  |  |
|  | -7,5M4,5M | -8M 12M | -6M3M | 1,5M3M | 5,5M-7,5M | M 0 | M-3M |
|  | 6-3 | 4-8 | 4 -2 | -2,5-2 | -35 | -10 | 02 |
|  | 1,53/4 | 4 2 | 20,5 | 10,5 | -2,5-5/4 | 00 | -1-0,5 |
|  | -7-3/4 | -2,5-2 | 1-0,5 | 0-0,5 | 05/4 | 00 | 00,5 |
|  | -1315/8 | -35 | -2,55/4 | 05/4 | 0-25/16  | 00 | 0-5/4 |

Меняем и 

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |  |  |
|  | -3M3M | 4M-4M | 3M-2M | 4,5M-4,5M | -2MM | M-M | -2M2M |
|  | 33/2 | -4-2 | -2-1 | -4,5-9/4 | 20,5 | -1-0,5 | 21 |
|  | 3/415/8  | 2-2,5 | 0,5-5/4 | 0,5-45/16 | -5/45/8 | 0-5/8 | -0,55/4 |
|  | -31/4-15/8 | -4,52,5 | -0,55/4 | -0,545/16 | 5/4-5/8 | 05/8 | 0,5-5/4 |
|  | -89/875/32 | 2-25/8 | 5/4-25/16 | 5/4-225/64 | -25/1625/32 | 0-25/32 | -5/425/16 |

Меняем  и 

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |  |  |
|  | 00 | 00 | M0 | 00 | M0 | 00 | 00 |
|  | 3/277/8 | -2-1 | -1-3/4 | -9/4-37/16 | 0,55/8 | -0,5-5/8 | 13/4 |
|  | 21/877/32 | -0,5-1/4 | -3/4-3/16 | -37/16-37/64 | 5/85/32 | -5/8-5/32 | 3/4-3/16 |
|  | -77/877/16 | -2-0,5 | 3/4-3/8 | 37/16-37/32 | -5/85/16 | 5/8-5/16 | -3/43/8 |
|  | -281/32693/128 | -9/8-9/16 | -5/16-27/64 | -145/64-333/256 | 25/3245/128 | -25/32 -45/128 | 5/1627/64 |

Меняем  и 

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |  |  |
|  | 00 | 00 | M0 | 00 | M0 | 00 | 00 |
|  | 89/8431/18 | -1-16/9 | -7/4 | -73/16 | 9/8 | -9/8 | 7/4 |
|  | 161/32431/72 | -1/4-4/9 | -15/16 | -185/64 | 25/32 | -25/32 | 9/16 |
|  | 77/16431/36 | -0,5-8/9 | -3/8 | -37/32 | 5/16 | -5/16 | 3/8 |
|  | -431/32431/18 | -9/16-16/9 | -47/64 | -913/256 | 145/128 | -145/128 | 47/64 |

Меняем  и 

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |  |  |
|  | 0 | 0 | M | 0 | M | 0 | 0 |
|  | 2525/72 |  |  |  |  |  |  |
|  | 3173/288 |  |  |  |  |  |  |
|  | 2417/144 |  |  |  |  |  |  |
|  | 431/18 |  |  |  |  |  |  |

Итак, =====, =16,785, =11,017, =23,944, =35,07

6) Условия дополняющей нежесткости выполняются ,значит, решения исходной задачи квадратичного программирования существует.

Ответ: существует.

**Литература.**

1) Курс лекций Плотникова Н.В.

2) Пантелеев А.В., Летова Т.А. «Методы оптимизации в примерах и задачах».